

**TOPOLOGISCHE EIGENSCHAFTEN
MASSWERTIGER ABBILDUNGEN
UND
STOCHASTISCHE ANWENDUNGEN**

Andreas Schief

München 1986

TOPOLOGISCHE EIGENSCHAFTEN
MAßWERTIGER ABBILDUNGEN
UND
STOCHASTISCHE ANWENDUNGEN

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Andreas Schief

eingereicht im Juli 1986

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H.G. Kellerer

2. Berichterstatter: Prof. Dr. P. Gänßler

Tag der mündlichen Prüfung: 15.12.1986

Einleitung und Inhaltsübersicht	I
<u>0. Kapitel:</u>	
Definitionen und Abkürzungen	1
<u>1. Kapitel:</u>	
Die Offenheit der Addition von Maßen	4
<u>2. Kapitel:</u>	
Die Abgeschlossenheit der Addition von Maßen	19
<u>3. Kapitel:</u>	
Die Subtraktion von Maßen	29
<u>4. Kapitel:</u>	
Die Infimums- und Supremumsabbildungen	38
<u>5. Kapitel:</u>	
Die Bildmaßabbildung	46
<u>6. Kapitel:</u>	
Die Marginalmaßabbildungen für Produkträume	64
<u>7. Kapitel:</u>	
Die Marginalmaßabbildung für stochastische Prozesse mit stetigen Pfaden	77
<u>8. Kapitel:</u>	
Die Mittelwertabbildung stetiger Funktionen von Maßen	96

Verzeichnis der verwendeten Symbole	108
Literatur	109

EINLEITUNG UND INHALTSÜBERSICHT

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung einiger zentraler maß- bzw. wahrscheinlichkeitstheoretischer Abbildungen auf ihre Offenheit. Beispiele hierfür sind

a) die Bildmaßabbildung:

Jedem Borelmaß μ auf einem topologischen Raum X wird sein Bildmaß $\tilde{\varphi}(\mu)$ bzgl. einer Borelmeßbaren Funktion $\varphi : X \rightarrow Y$ zugeordnet:

$$\tilde{\varphi}(\mu)(B) := \mu(\varphi^{-1}(B))$$

für Borelmengen B in Y .

b) Die Marginalmaßabbildung für Produkträume:

Jedem Borelmaß μ auf dem Produkt zweier topologischer Räume wird das Paar $(\tilde{\pi}_1(\mu), \tilde{\pi}_2(\mu))$ seiner Marginalmaße zugeordnet (π_1, π_2 seien die Projektionen).

c) Die Marginalmaßabbildung für Prozesse:

Jedem Borelmaß μ auf dem Raum X^T aller stetigen Abbildungen von einem Parameterraum T in einen Zustandsraum X wird die Abbildung $\Lambda(\mu)$ zugeordnet, die jedes $t \in T$ auf die Randverteilung

$$\Lambda(\mu)(t) := \tilde{\pi}_t(\mu)$$

abbildet ($\pi_t : X^T \ni f \rightarrow f(t) \in X$ ist die Projektion im Zeitpunkt t).

d) die Integration stetiger, maßwertiger Abbildungen:

Ist λ ein Borelmaß auf einem Parameterraum T , so wird jeder stetigen Abbildung ϕ von T in die Borelmaße eines topologischen Raumes X ihr "Integral" $\phi_\lambda(\phi)$ bzgl. λ zugeordnet. Es ist definiert durch

$$\phi_\lambda(\phi)(B) := \int \phi(t)(B) \lambda(dt)$$

für Borelmengen B in X .

(Allen Funktionenräumen liegt die kompakt-offen-Topologie zugrunde.)

Die Offenheit dieser Abbildungen wurde für straffe Wahrscheinlichkeitsmaße auf kompakten oder polnischen Räumen von L.Q. Eifler und S.M. Chang untersucht. Als Topologie auf der Menge $P_{st}(X)$ der straffen Wahrscheinlichkeitsmaße eines topologischen Raumes X wurde dabei die von den Auswertungen

$$\mu \mapsto \int f d\mu$$

stetiger beschränkter Funktionen $f \in \mathcal{C}^b(X)$ induzierte Initialtopologie zugrundegelegt. $P_{st}(X)$ wurde also als Unterraum des mit der schwach- $*$ -Topologie versehenen Dualraumes von $\mathcal{C}^b(X)$ aufgefaßt.

Wie sich herausstellen wird, lassen sich die Resultate von Eifler und Chang aus der Sicht der topologischen Maßtheorie in einen allgemeineren Zusammenhang einbetten. Die Ergebnisse dieser Arbeit betreffen folglich wesentlich breitere

Klassen topologischer Räume sowie beliebige (positive, finite) Borelmaße. Hierzu muß die Menge $M_G(X)$ aller Borelmaße eines beliebigen topologischen Raumes X topologisiert werden. Die von den Auswertungen stetiger beschränkter Funktionen erzeugte Topologie ist hierbei im allgemeinen nicht fein genug, da sie minimalen Trennbarkeitsforderungen, wie zum Beispiel der Hausdorff-eigenschaft, nicht genügt. Wie TOPSØE gezeigt hat, ist die Betrachtung der folgenden Topologie der schwachen Konvergenz dagegen sinnvoll:

$w(X)$ sei die größte Topologie auf $M_G(X)$ derart, daß die Abbildungen

$$\mu \rightarrow \mu(G) \quad \text{bzw.} \quad \mu \rightarrow \mu(F)$$

für offene G und abgeschlossene F in X nach unten bzw. nach oben halbstetig sind. Für vollständig reguläre Räume X , also insbesondere für die von Chang und Eifler betrachteten Räume, fällt diese Topologie auf dem Unterraum $P_{st}(X)$ mit der von der Auswertung stetiger beschränkter Funktionen erzeugten zusammen.

Die Topologie von TOPSØE zugrundelegend untersucht die vorliegende Arbeit nun die Abbildungen (a)-(d) auf topologische Eigenschaften, insbesondere auf ihre Offenheit. Wegen der unterschiedlichen Stetigkeiten der die Topologien induzierenden Auswertungen ist es klar, daß hierbei grundsätzlich andere Beweismethoden als in den erwähnten Arbeiten nötig sein werden. Eines jedoch haben

die Beweise dieser Arbeit und diejenigen von Eifler zu den Abbildungen (a) und (c) gemeinsam:

Wesentlich geht die innere Struktur der Räume $M_G(X)$, insbesondere die Offenheit der Addition im Kegel $M_G(X)$, in die Betrachtungen ein. Bevor also in den letzten vier Kapiteln die zentralen Abbildungen behandelt werden, beschäftigen sich die ersten vier mit der Struktur des Raumes $M_G(X)$.

Im folgenden sollen mittels einer Inhaltsübersicht die Methoden und die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit erläutert werden. Falls schon Resultate vorliegen sollten, werden sie aufgeführt und mit den neuen verglichen.

Das erste Kapitel liefert die Aussage, die der ganzen Arbeit wesentlich zugrundeliegt: Unabhängig vom Raum X ist die Addition in $M_G(X)$ offen. Bisher war bekannt, daß im Unterraum der straffen Wahrscheinlichkeitsmaße die Abbildung

$$(\mu, \nu) \mapsto \lambda\mu + (1-\lambda)\nu, \quad 0 < \lambda < 1$$

offen ist, falls X ein Hausdorffraum ist (EIFLER(2)). Zwei wesentliche Ideen liegen dem Beweis zugrunde und sichern die Offenheit der Addition unabhängig von der Topologie auf X und der Straffheit der Maße:

1. Die Offenheit der Addition kann auf den Fall endlicher Räume X zurückgeführt werden:

Es gibt eine Basis von $w(x)$, deren Elemente jeweils

durch die Auswertung endlich vieler offener Mengen in X definiert werden. Die Summe zweier solcher Basismengen kann also durch die Auswertung endlich vieler offener Mengen $G_1 \dots G_m$ beschrieben werden. Werden nun alle Punkte, die im selben Atom der von $\{G_i : 1 \leq i \leq m\}$ erzeugten σ -Algebra liegen, identifiziert und der Raum der Äquivalenzklassen mit einer geeigneten Topologie versehen, so ist das Problem auf den endlichen Fall reduziert worden.

2. Ist $M(\Omega)$ die Menge der positiven finiten Maße auf der Potenzmenge einer endlichen Menge Ω , so gilt (1.3):

$$(+)\ \{\mu_1 \in M(\Omega) : \mu_1 \vdash \nu_1\} + \{\mu_2 \in M(\Omega) : \mu_2 \vdash \nu_2\} = \{\mu \in M(\Omega) : \mu \vdash \nu_1 + \nu_2\}.$$

Hierbei bezeichnet

$$\mu \vdash \nu : \Leftrightarrow \mu(B) \geq \nu(B) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}$$

die von einer $\cap$ - und $\cup$ -stabilen Teilmenge B von $\mathcal{P}(\Omega)$ erzeugte Präordnung. Setzt man nun für einen endlichen Raum $X = \Omega$ noch $\mathcal{B} = \mathcal{G}(X)$, so läßt sich aus (+) die Offenheit der Addition entnehmen.

Ist $M_0(X)$ first countable, so liefert die Offenheit der Addition folgenden Satz, der bisher nur für polnische (EIFLER (1)) oder metrisierbare und separable Räume (DEGENS) bekannt war:

Konvergiert die Folge $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $M_0(X)$ gegen $\mu + \nu$, so gibt es Zerlegungen $\mu_n + \nu_n = \rho_n$ mit $\mu_n \rightarrow \mu$ und $\nu_n \rightarrow \nu$ (1.7).

Das Kapitel endet mit einer Betrachtung der Offenheit der abzählbaren Addition.

W. GRÖMIG zeigte, daß für beliebige topologische Räume X der Produktraum $X^{\mathbb{N}}$ zu einer abgeschlossenen Teilmenge von $M_{\tau}(X)$ (dem Raum der τ -stetigen Borelmaße auf X) homöomorph ist, und gewann dadurch Erkenntnisse über die topologischen Eigenschaften von $M_{\tau}(X)$. In seinem Beweis verwendete er die Abgeschlossenheit von Summen bestimmter abgeschlossener Mengen in $M_{\tau}(X)$. Das wirft die Frage auf, ob die Addition in $M_{\sigma}(X)$ auch abgeschlossen ist. Diese wird im 2. Kapitel für beliebige Räume X positiv beantwortet.

Der Beweis verwendet und zeigt (in Lemma (2.1)) die Quasikompaktheit der Mengen

$$D_{\rho} := \{ \mu \in M_{\sigma}(X) : \mu \leq \rho \} \quad \text{und}$$

$$E_{\rho} := \{ (\mu, \nu) \in M_{\sigma}(X) \times M_{\sigma}(X) : \mu + \nu = \rho \}$$

für $\rho \in M_{\sigma}(X)$ und benutzt wiederum die Reduktion auf den Fall endlicher Räume X .

Das Kapitel endet mit einem Satz über die Abgeschlossenheit der abzählbaren Addition und einem (nun leichten) Beweis der Aussage von Grömig.

Bei der Untersuchung der bereits erwähnten Abbildungen (a)-(d) geht nicht nur die Offenheit der Additions- sondern teilweise auch die Stetigkeit der Subtraktionsabbildung, die auf

$$H_C(X) := \{ (\mu, \nu) \in M_C(X) \times M_C(X) : \mu \geq \nu \} \quad , \quad c \in \{\sigma, r, \tau, st\},$$

definiert wird, ein. Das dritte Kapitel fragt nach Bedingungen für diese Stetigkeit.

Ein erstes und etwas Überraschendes Resultat ist die Äquivalenz der Hausdorffeigenschaft von $M_C(X)$ mit der Stetigkeit der Subtraktion auf $H_C(X)$ (Satz (3.3)). Somit ließe sich das Resultat von TOPSØE, p. 49 anwenden, welches besagt, daß $M_\tau(X)$ bzw. $M_{st}(X)$ einen Hausdorffraum bildet, falls X regulär bzw. Hausdorff ist. Unabhängig davon zeige ich, daß jede der Eigenschaften

- (i) $c = \sigma$ und X perfektnormal
- (ii) $c = r$ und X normal
- (iii) $c = \tau$ und X regulär
- (iv) $c = st$ und X Hausdorffraum

hinreichend für die Stetigkeit der Subtraktion auf $H_C(X)$ ist.

Eine Reihe von Beispielen zeigt abschließend, daß die jeweilige Trennungseigenschaft nicht abgeschwächt werden kann. $M_C(X)$ ist bekanntlich nicht nur ein konvexer Kegel sondern auch ein Verband. Die topologischen Eigenschaften von Infimums- und Supremumsbildung untersucht das vierte Kapitel. Die Offenheit der Supremumsabbildung für beliebige topologische Räume ist nicht tiefliegend und wird ohne Hilfsmittel gezeigt (4.2). Die Offenheit der Supremumsabbildung in $M_C(X)$ ist nur unter zusätzlichen Voraussetzungen richtig: Sie wird

in dieser Arbeit für die Fälle (i)-(iv) gezeigt werden mit Hilfe

1. der Offenheit der Addition in $M_C(X)$

2. einer schwachen Stetigkeitsaussage:

Unter den Bedingungen (i)-(iv) folgt für ein in $M_C(X)^2$ gegen (μ, ν) konvergentes Netz $(\mu_\beta, \nu_\beta)_{\beta \in B}$ aus der Annahme $\mu \wedge \nu = 0$ die Konvergenz von $\mu_\beta \wedge \nu_\beta$ gegen 0 (4.4).

Wiederum sichern Gegenbeispiele die Voraussetzungen (i)-(iv) ab.

Da die Funktionen

$$(\mu, \nu) \mapsto (\mu \wedge \nu)(X)$$

$$(\mu, \nu) \mapsto (\mu \vee \nu)(X)$$

nur in Ausnahmefällen stetig sind, gilt dies auch für die Verbandsoperationen. Jedoch wird in (4.3) unter den Bedingungen (i)-(iv) gezeigt, daß die Funktionen

$$(\mu, \nu) \mapsto (\mu \wedge \nu)(F) \quad \text{für } F \in \mathcal{F}(X) \quad \text{bzw.}$$

$$(\mu, \nu) \mapsto (\mu \vee \nu)(G) \quad \text{für } G \in \mathcal{G}(X)$$

nach oben bzw. nach unten stetig sind. Hieraus ergibt sich sofort die Borelmeßbarkeit der Verbandsoperationen (4.8). Alle Resultate können auf die abzählbare Supremums- bzw. Infimumsbildung ohne zusätzlichen Aufwand übertragen werden.

Das fünfte Kapitel untersucht die erste der eingangs erwähnten Abbildungen: die Bildmaßabbildung. Ist

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

eine Borelmeßbare Abbildung zwischen topologischen Räumen X, Y , so sei

$$\tilde{\varphi} : M_{\sigma}(X) \rightarrow M_{\sigma}(Y)$$

die induzierte Bildmaßabbildung. EIFLER (1) hatte für polnische Räume und stetige surjektive φ die Äquivalenz

$$(A) \quad \varphi \text{ offen} \iff \tilde{\varphi} \text{ offen}$$

gezeigt (er schränkte $\tilde{\varphi}$ allerdings auf die Wahrscheinlichkeitsmaße ein). Dieses Resultat soll hier für meßbare, surjektive φ zwischen Suslinräumen bewiesen werden. Hierzu wird zunächst ein nützlicher Begriff eingeführt:

$\tilde{\varphi}$ heißt "lokal surjektiv", wenn für alle offenen G in X mit meßbarem Bild $\varphi(G)$

$$\tilde{\varphi}(\{\mu \in M_{\sigma}(X) : \mu(\bar{G}) = 0\}) = \{\mu \in M_{\sigma}(Y) : \mu(\overline{\varphi(G)}) = 0\}$$

gilt (Def. (5.1)). Für die Aussagen

(α) φ ist offen und surjektiv, $\tilde{\varphi}$ ist lokal surjektiv,

(β) $\tilde{\varphi}$ ist offen,

(γ) φ ist offen und surjektiv, $\tilde{\varphi}$ ist surjektiv

wird die Implikationskette

$$(K) \quad (\alpha) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\gamma)$$

für beliebige Hausdorffräume X, Y gezeigt. Der Beweis der ersten Implikation verwendet wesentlich die Offenheit der Addition in $M_\sigma(Y)$: Soll für $\mu \in M_\sigma(X)$ und $\Gamma \in \mathcal{W}(X)$ gezeigt werden, daß $\tilde{\varphi}(\Gamma)$ eine Umgebung von $\tilde{\varphi}(\mu)$ bildet, so wird für "einfache" $\mu_j \in M_\sigma(X)$ und $\Gamma_j \in \mathcal{W}(X)$ mit

$$\sum \mu_j = \mu \quad \text{und} \quad \sum \Gamma_j \subset \Gamma$$

gezeigt, daß $\tilde{\varphi}(\Gamma_j)$ eine Umgebung von $\tilde{\varphi}(\mu_j)$ ist.

Ist φ eine offene, surjektive und meßbare Abbildung zwischen Suslinräumen, so ist $\tilde{\varphi}$ nach einem tiefliegenden Resultat von L. Schwartz schon lokal surjektiv (Beweis zu (5.7)).

Die Äquivalenz (A) gilt also auch für Suslinräume X, Y .

Das Kapitel schließt mit einer Reihe komplizierter Beispiele, welche die Umkehrungen in (K) auch für stetige φ widerlegen und den naheliegenden Schluß von stetigen, offenen und surjektiven Abbildungen φ auf die Offenheit von $\tilde{\varphi}$ aufs Bild falsifizieren.

EIFLER (3) zeigte für kompakte Räume K_1, K_2 die Offenheit der Marginalmaßabbildung

$$P_{st}(K_1 \times K_2) \ni \mu \rightarrow (\tilde{\pi}_1(\mu), \tilde{\pi}_2(\mu)) \in P_{st}(K_1) \times P_{st}(K_2)$$

(π_1, π_2 sind die Projektionen).

Im sechsten Kapitel wird gezeigt, daß weder die Forderung nach der Straffheit der Maße noch die nach der Kompaktheit

der Räume wesentlich ist: die Marginalmaßabbildung

$$\Lambda : M_{\tau}(X_1 \times X_2) \ni \mu \rightarrow (\tilde{\pi}_1(\mu), \tilde{\pi}_2(\mu)) \in M_{\tau}(X_1) \times M_{\tau}(X_2)$$

ist für beliebige topologische Räume X_1, X_2 offen aufs Bild.

Mein Beweis beruht auf zwei Ideen:

1. Bezeichnet man mit L die Menge aller endlichen Summen von Produktmaßen auf $X_1 \times X_2$, so gilt für $\Gamma \in w(X_1 \times X_2)$

$$\Lambda(\Gamma) = \Lambda(\Gamma \cap L).$$

2. Auf L ist Λ im wesentlichen nur eine Addition der entsprechenden Faktoren, so daß mit Hilfe der Offenheit der Addition von Maßen die Behauptung gezeigt werden kann.

Die zweite Hälfte dieses Kapitels behandelt für den Produktraum $Y = X_1 \times X_2 \times X_3$ folgende Marginalmaßabbildungen:

$$\Lambda_1 : M_{\tau}(Y) \ni \mu \rightarrow (\tilde{\pi}_{12}(\mu), \tilde{\pi}_{23}(\mu))$$

$$\Lambda_2 : M_{\tau}(Y) \ni \mu \rightarrow (\tilde{\pi}_{12}(\mu), \tilde{\pi}_{23}(\mu), \tilde{\pi}_{13}(\mu))$$

(Wiederum sind $\pi_{k\ell} : Y \rightarrow X_k \times X_{\ell}$ die Projektionen).

Es stellt sich heraus, daß Λ_1 genau dann offen aufs Bild

ist, wenn der Raum X_2 diskret ist. Die Abbildung Λ_2 dagegen ist nicht offen aufs Bild, wenn einer der Räume nicht - diskret ist und offen aufs Bild im Falle endlicher diskreter Räume X_1, X_2, X_3 .

Naheliegender ist die folgende Verallgemeinerung der im sechsten Kapitel betrachteten Abbildung Λ zu einer Marginalmaßabbildung für stochastische Prozesse mit stetigen Pfaden: Seien X, T topologische Räume, X^T der mit der kompakt-offen - Topologie versehene Raum der stetigen Funktionen von T nach X . Jedem Maß $\mu \in M_T(X^T)$ wird die Abbildung

$$\Lambda(\mu) : T \ni t \rightarrow \tilde{\pi}_t(\mu)$$

zugeordnet ($\pi_t : X^T \ni f \rightarrow f(t) \in X$ ist die Projektion in t). Diese Abbildung $\Lambda(\mu)$ ist stetig, wenn T first countable oder lokalkompakt ist (7.1). In diesem Falle ist Λ also eine Abbildung in den wiederum mit der kompakt-offen-Topologie versehenen Raum

$$\mathcal{C} := \{ \phi \in M_T(X)^T : \phi(\cdot)(X) \text{ ist konstant} \}.$$

EIFLER (3) zeigte die Offenheit dieser Abbildung für polnische X und kompakte, metrisierbare, 0-dimensionale Parameterräume T (allerdings wiederum unter Beschränkung auf die Wahrscheinlichkeitsmaße).

Im siebten Kapitel wird nun gezeigt, daß für vollständig

reguläre Räume X und T die Surjektivität von Λ die Offenheit impliziert (7.6). Für den Beweis wird zunächst gezeigt, daß für vollständig reguläre X und T die Offenheit der Addition in $M_T(X)$ auf die Offenheit der Addition in $\mathbb{C}$ übertragen werden kann (7.4). Der gewünschte Satz ergibt sich dann mit der gleichen Idee wie beim Beweis der Offenheit der Bildmaßabbildung (die Offenheit in μ wird durch geeignete Zerlegung bewiesen) und einer etwas umfangreichen Beweistechnik.

Eine hinreichende Bedingung für die Surjektivität von Λ gaben BLUMENTHAL/CORSON: T kompakt und 0-dimensional sowie X vollständig metrisierbar. In (7.7) wird hieraus mit Hilfe der Stone-Čech-Kompaktifizierung für vollständig reguläre T und kompakt-metrisierbare X die Äquivalenz

$$T \text{ stark 0-dimensional} \iff \Lambda \text{ surjektiv}$$

gefolgert. Die vorherigen Resultate sind somit auch für $T \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}\}$ anwendbar.

Das abschließende achte Kapitel behandelt einen Aspekt der maßwertigen Integration, indem es die Resultate des ersten Kapitels noch einmal verallgemeinert:

Sind X, T topologische Räume und ist $\lambda \neq 0$ ein Borelmaß auf T , so wird jeder integrierbaren Abbildung $\phi \in M_0(X)^T$ ihr Integral bzgl. λ

$$\varphi_\lambda(\phi)(\cdot) := \int \phi(t)(\cdot) \lambda(dt) \in M_0(X)$$

zugeordnet (Def. (8.2)). CHANG zeigt die Offenheit der Abbildung φ_λ für kompakte T und polnische X (unter Beschränkung auf Wahrscheinlichkeitsmaße).

Mittels eines neuen Beweises wird in (8.4) diese Aussage für beliebige X und vollständig reguläre T gezeigt.

Zwei Ideen sind wesentlich:

$$1. \text{ Ist } R := \left\{ \sum_{i=1}^n h_i v_i : n \in \mathbb{N}, v_i \in M_\sigma(X), 0 \leq h_i \in \mathcal{C}(T), \sum_{i=1}^n h_i = 1 \right\},$$

so gilt für offene U in $M_\sigma(X)^T$

$$\varphi_\lambda(U) = \varphi_\lambda(U \cap R).$$

2. Auf R ist φ_λ im wesentlichen nur eine Addition:

$$\varphi_\lambda \left(\sum_{i=1}^n h_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda(h_i) v_i.$$

Die Offenheit von φ_λ kann also auf die Offenheit der Addition in $M_\sigma(X)$ zurückgeführt werden.

Ein Beispiel am Schluß zeigt, daß die Eigenschaft

" T regulär" nicht hinreichend für die Aussage von (8.4) ist.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. H.G. Kellerer für mehrere wertvolle Anregungen bedanken.

0. Kapitel: DEFINITIONEN UND ABKÜRZUNGEN

1. $\mathbb{R}$ bezeichne die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}^+$ die der echt positiven reellen Zahlen und $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Die natürlichen Zahlen ohne die 0 seien mit $\mathbb{N}$, die rationalen Zahlen mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Die Potenzmenge einer Menge X werde mit $\mathcal{P}(X)$ abgekürzt. Für $P \in \mathcal{P}(X)$ sei $\bar{P} \in \mathcal{P}(X)$ das Komplement.
2. Ist X ein topologischer Raum, so seien $\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{K}(X)$ und $\mathcal{B}(X)$ die Gesamtheiten aller offenen, abgeschlossenen, kompakten bzw. Borelmeßbaren Teilmengen von X . Für $P \in \mathcal{P}(X)$ seien P^a und P^o der Abschluß und der offene Kern von P .
 $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}_1(X)$, $\mathcal{C}_s(X)$ bzw. $\mathcal{M}(X)$ bezeichnen die Gesamtheiten aller stetigen, nach oben halbstetigen, nach unten halbstetigen bzw. Borel-meßbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Die Mengen der entsprechenden beschränkten Funktionen seien $\mathcal{C}^b(X)$, $\mathcal{C}_1^b(X)$, $\mathcal{C}_s^b(X)$ bzw. $\mathcal{M}^b(X)$.
3. Ist Y ein weiterer topologischer Raum, so bezeichne X^Y den Raum aller stetigen Funktionen $f: Y \rightarrow X$ versehen mit der kompakt-offen-Topologie. Für $K \in \mathcal{K}(Y)$ sind die Mengen

$$(K, A) := \{ f \in X^Y : f[K] \subset A \}$$

offen bzw. abgeschlossen, wenn A offen bzw. abgeschlossen in X ist.

4. Positive und finite Maße auf der Borelsigmaalgebra $\mathcal{B}(X)$ werden als Borelmaße bezeichnet. $M_\sigma(X)$ sei die Menge aller Borelmaße, $P_\sigma(X)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf X . Das Diracmaß im Punkt $x \in X$ sei ε_x . Ist $\mu \in M_\sigma(X)$, so sei

- a) $\mu(f)$ das Integral von f bzgl. μ , falls $f \in \mathbb{M}(X)$ integrierbar ist.
- b) $f\mu \in M_\sigma(X)$ das von der positiven, integrierbaren Dichte $f \in \mathbb{M}(X)$ erzeugte Maß bzgl. μ .
- c) $\tilde{\varphi}(\mu) \in M_\sigma(Y)$ das Bildmaß von μ bzgl. einer Borelmeßbaren Abbildung $\varphi: X \rightarrow Y$.

5. Ein Maß $\mu \in M_\sigma(X)$ heißt

- a) regulär, wenn für alle $B \in \mathcal{B}(X)$ gilt

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(F) : B \supset F \in \mathcal{F}(X) \} .$$

- b) τ -stetig, wenn für jedes nach unten gerichtete System abgeschlossener Mengen $\mathcal{F}$ gilt

$$\mu(\cap \mathcal{F}) = \inf \{ \mu(F) : F \in \mathcal{F} \} .$$

- c) straff, wenn für alle $B \in \mathcal{B}(X)$ gilt

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K) : B \supset K \in \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{B}(X) \} .$$

(In Hausdorffräumen X gilt $\mathcal{K}(X) \cap \mathcal{B}(X) = \mathcal{K}(X)$.)

Die Gesamtheiten aller regulären, τ -stetigen bzw. straffen Maße seien mit $M_\tau(X)$, $M_\tau(X)$ bzw. $M_{st}(X)$

bezeichnet. Die entsprechenden Mengen der Wahrscheinlichkeitsmaße mögen $P_R(X)$, $P_T(X)$ bzw. $P_{st}(X)$ heißen.

6. Die Menge $M_O(X)$ wird nun mit der schwachen Topologie $w(X) = \mathcal{G}(M_O(X))$ versehen: $w(X)$ sei die gröbste Topologie derart, daß für $G \in \mathcal{G}(X)$ bzw. $F \in \mathcal{F}(X)$ die Abbildungen

$$M_O(X) \ni \mu \rightarrow \mu(G) \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$M_O(X) \ni \mu \rightarrow \mu(F) \in \mathbb{R}$$

nach unten bzw. nach oben halbstetig sind. Die Mengen vom Typ

$$\{\mu \in M_O(X) : \mu(G_1) > \gamma_1 \quad \text{für } 1=1, \dots, n, \mu(X) < \delta\}$$

für $G_1 \in \mathcal{G}(X)$, $\gamma_1, \delta \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ bilden also eine Basis von $w(X)$. Es ist leicht zu sehen, daß für $f \in \mathcal{C}_s^b(X)$ bzw. $f \in \mathcal{C}_1^b(X)$ die Abbildung

$$M_O(X) \ni \mu \rightarrow \mu(f) \in \mathbb{R}$$

wiederum nach unten bzw. oben halbstetig ist.

1. Kapitel: DIE OFFENHEIT DER ADDITION VON MÄßEN

In topologischen Vektorräumen V ist die Abbildung

$$V \times V \ni (x, y) \rightarrow x+y \in V$$

stets offen, da für offene Mengen G_1 und G_2 aus V die Offenheit von

$$G_1 + G_2 = \{ x+y : x \in G_1 \text{ und } y \in G_2 \} = \bigcup_{x \in G_1} (x+G_2)$$

aus derjenigen von $x+G_2$ für beliebige x folgt.

Im konvexen Kegel $M_\sigma(X)$ ist dagegen für $\mu \in M_\sigma(X)$ und $\Gamma \in \mathcal{M}(X)$ die Menge $\mu + \Gamma$ im allgemeinen nicht offen. Um dies zu sehen, nehme man $\mu \neq 0$ und $0 \in \Gamma$ an. Die Folge

$\mu_n := \frac{n}{n+1} \mu$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert gegen $\mu \in \mu + \Gamma$, obwohl kein μ_n in $\mu + \Gamma$ liegt.

Larry Q. Eifler hat in verschiedenen Arbeiten die Abbildung

$$P_{st}(X) \times P_{st}(X) \ni (\mu, \rho) \rightarrow \lambda \mu + (1-\lambda) \rho \in P_{st}(X)$$

für $0 < \lambda < 1$ betrachtet und ihre Offenheit für Hausdorffräume X gezeigt (EIFLER (2)). Hier soll mittels eines neuen Beweisverfahrens gezeigt werden, daß keinerlei Voraussetzungen an X oder an die Maße für diese Aussage nötig sind. Die zu untersuchende Abbildung wird nun wie folgt definiert.

(1.1) Definition

Für einen topologischen Raum X sei

$$\phi_+ : M_\sigma(X) \times M_\sigma(X) \ni (\mu, \rho) \rightarrow \mu + \rho \in M_\sigma(X) .$$

(Auf eine Indizierung von ϕ_+ durch X wird verzichtet.)

Aus Vollständigkeitsgründen sei der folgende einfache Satz aufgeführt.

(1.2) Satz

ϕ_+ ist stets stetig.

Beweis:

Die Aussage ergibt sich aus der Summenstabilität von

$$C_B(M_\sigma(X)) . \quad \text{Q.e.d.}$$

Nun wird ein Lemma bereitgestellt, mit dessen Hilfe die Offenheit von ϕ_+ auf endlichen Räumen X leicht gezeigt werden kann.

(1.3) Lemma

Sei $\Omega = \{1, \dots, n\}$ und B eine $\cap$ - und $\cup$ -stabile Teilmenge von $P(\Omega)$. Auf der Menge $M(\Omega)$ der positiven, finiten Maße auf $P(\Omega)$ ist durch

$$\mu \preceq \nu : \Leftrightarrow \mu(B) \geq \nu(B) \quad \text{für } B \in B$$

eine Präordnung gegeben.

Für Maße $\mu, \nu_1, \nu_2 \in M(\Omega)$ sind dann äquivalent:

$$(i) \quad \mu \succcurlyeq \nu_1 + \nu_2$$

(ii) Es gibt Maße $\mu_1, \mu_2 \in M(\Omega)$ mit

$$\mu = \mu_1 + \mu_2, \mu_1 \succcurlyeq \nu_1, \mu_2 \succcurlyeq \nu_2 \quad \text{und} \quad \mu_2(\Omega) = \nu_2(\Omega).$$

Beweis:

Nur die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist zu zeigen. Für $\nu := \nu_1 + \nu_2$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{A} := \{ (\mu', \nu') \in M(\Omega) \times M(\Omega) : \nu_1 \leq \nu' \leq \nu, \mu' \leq \mu, \\ \mu' \succcurlyeq \nu', \mu - \mu' \succcurlyeq \nu - \nu' \quad \text{und} \quad (\mu - \mu')(\Omega) = (\nu - \nu')(\Omega) \} \end{aligned}$$

ist dazu die Existenz eines Elements $(\mu', \nu_1) \in \mathbb{A}$ zu beweisen.

Ordnet man nun jedem $(\mu', \nu') \in \mathbb{A}$ einen Index

$$\begin{aligned} i(\mu', \nu') := & |\{x \in \Omega : \mu'(\{x\}) > 0\}| + |\{B \in \mathcal{B} : \mu'(B) > \nu'(B)\}| \\ & + |\{x \in \Omega : \nu'(\{x\}) > \nu_1(\{x\})\}| \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{aligned}$$

zu, so zeigt die folgende Behauptung $(*)$, daß das gesuchte Element $(\mu', \nu_1) \in \mathbb{A}$ in endlich vielen Schritten aus $(\mu, \nu) \in \mathbb{A}$ konstruiert werden kann:

zu $(\mu', \nu') \in \mathbb{A}$ mit $\nu' \neq \nu_1$ gibt es $(\mu'', \nu'') \in \mathbb{A}$

$(*)$

mit $\mu'' \leq \mu', \nu'' \leq \nu'$ und $i(\mu'', \nu'') < i(\mu', \nu')$.

Beweis von (*):

Sei also $(\mu', \nu') \in A$ mit $\nu' \neq \nu_1$.

Dann gibt es ein Element x_0 von Ω (ohne Einschränkung sei $x_0 = 1$ gesetzt) mit

$$\nu'(\{1\}) > \nu_1(\{1\}).$$

Man betrachte nun die Mengensysteme

$$B_1 := \{ B \in B : \nu'(B) < \mu'(B) \} \quad \text{und}$$

$$B_2 := \{ B \in B : \nu'(B) = \mu'(B) \}.$$

(1) Zu zeigen ist die Existenz eines Punktes $x \in \Omega$, für den gilt

$$(\alpha) \quad \mu'(\{x\}) > 0,$$

$$(\beta) \quad x \in B_2 \iff 1 \in B_2 \quad \text{für alle } B_2 \in B_2,$$

$$(\gamma) \quad 1 \in B \implies x \in B \quad \text{für alle } B \in B.$$

Wählt man dann für $B_1^* := \{ B_1 \in B_1 : 1 \notin B_1, x \in B_1 \}$

$$0 < \delta := \mu'(\{x\}) \wedge (\nu'(\{1\}) - \nu_1(\{1\})) \wedge \min \{ \mu'(B_1) - \nu'(B_1) : B_1 \in B_1^* \},$$

so ist

$$(\mu'', \nu'') := (\mu' - \delta \epsilon_x, \nu' - \delta \epsilon_1)$$

ein Element von A . ((β) sichert $\mu'' \succ \nu''$, (γ) sichert $\mu - \mu'' \prec \nu - \nu''$), welches einen geringeren Index als (μ', ν') besitzt.

(2) Ist $\mu'(\{1\}) > 0$, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also jetzt $\mu'(\{1\}) = 0$. Setzt man

$$B_0 := \cap \{ B \in \mathcal{B} : 1 \in B \} ,$$

so ist (γ) äquivalent zu " $x \in B_0$ ".

(3) Für Mengen B_2 und $\tilde{B}_2$ aus $\mathcal{B}_2$ gilt offensichtlich

$$\nu'(B_2 \cap \tilde{B}_2) + \nu'(B_2 \cup \tilde{B}_2) = \mu'(B_2 \cap \tilde{B}_2) + \mu'(B_2 \cup \tilde{B}_2) .$$

Die Mengen $B_2 \cap \tilde{B}_2$ und $B_2 \cup \tilde{B}_2$ liegen also ebenfalls in $\mathcal{B}_2$.

Sei B^0 das Atom der von $\mathcal{B}_2$ in Ω erzeugten σ -Algebra, in dem 1 liegt ((β) ist also äquivalent zu " $x \in B^0$ ").

Es läßt sich in der Form

$$B^0 = C \setminus B_2$$

mit $C \supset B_2$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$ und $\mu'(C) \geq \nu'(C)$ darstellen

(Gilt $1 \in B_2$, so ist $C \in \mathcal{B}_2$ wählbar; ansonsten wird $C = \Omega$ gewählt).

(4) Wegen $B_0 \cup B_2 \in \mathcal{B}$ gilt

$$\mu'(B_2 \cup B_0) \geq \nu'(B_2 \cup B_0) .$$

Es folgt also

$$\mu'(B_0 \setminus B_2) \geq \nu'(B_0 \setminus B_2) .$$

Wegen $0 = \mu'(\{1\}) < \nu'(\{1\})$ ergibt sich hieraus

$$\mu'(B_0 \setminus (B_2 \cup \{1\})) > \nu'(B_0 \setminus (B_2 \cup \{1\})) .$$

Demnach gibt es ein $x \in \Omega$ mit $\mu'(\{x\}) > 0$ und

$$x \in B_0 \setminus (B_2 \cup \{1\}) \subset B_0 \cap (B_0 \setminus B_2) \subset B_0 \cap B^0 .$$

Q.e.d.

Einfache Beispiele zeigen, daß die Voraussetzung "B $\cap$ - und U-stabil" wesentlich für Lemma (1.3) ist.

Im nächsten Schritt werden nun die Umgebungsbasen definiert, die für den Beweis der Offenheit der Addition in $M_\sigma(X)$ herangezogen werden. Für einen topologischen Raum X sei

$$A := \{ (G, \varepsilon) : 1 > \varepsilon > 0 \text{ und } G \subset G(X) \text{ } \cap\text{- und U-stabil} \} .$$

(Auf eine Indizierung von A durch X wird verzichtet.)

Man beachte hierbei, daß die Eigenschaft " G $\cap$ - und U-stabil" insbesondere $\cap \emptyset = X \in G$ und $U \emptyset = \emptyset \in G$ impliziert. Für $\alpha = (G, \varepsilon)$, $t > 0$ und $\mu \in M_\sigma(X)$ sei weiterhin

$$t\alpha := (G, t\varepsilon) ,$$

$$A(\alpha, \mu) := \{ \rho \in M_\sigma(X) : \rho(G) > \mu(G) - \varepsilon \text{ für } G \in G \text{ und} \\ \rho(X) < \mu(X) + \varepsilon \}$$

sowie $n_\alpha := m_\alpha + 1$, wobei m_α die Anzahl der Atome der von G in X erzeugten σ -Algebra sein möge. Das Mengensystem $\{A(\alpha, \mu) : \alpha \in A\}$ ist nun offensichtlich eine Umgebungsbasis von μ .

Mit

$$(G, \varepsilon) \leq (G', \varepsilon') : \iff G \subset G' \text{ und } \varepsilon \geq \varepsilon'$$

wird A zur gerichteten Menge. Jedes Netz $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $\mu_\alpha \in A(\alpha, \mu)$ für $\alpha \in A$ konvergiert gegen μ .

Die Offenheit der Addition in $M_\sigma(X)$ wird nun zunächst für einen endlichen T_0 -Raum bewiesen:

(1.4) Lemma

Ist X ein endlicher T_0 -Raum, sind $v_1, v_2 \in M_\sigma(X)$ und ist $\alpha = (G(X), \epsilon) \in \Lambda$, so gilt für $v = v_1 + v_2$

$$\Lambda(n_\alpha, v_1) + \Lambda(n_\alpha, v_2) \supset \Lambda(\alpha, v) .$$

Beweis:

Zunächst sei bemerkt, daß für einen endlichen T_0 -Raum X stets $F(X) = B(X)$ gilt, womit sofort $n_\alpha = |X| + 1$ folgt. Um Lemma (1.3) anwenden zu können, wird

$$\tilde{v}_1 := \sum_{x \in X} ((v_1(\{x\}) - \epsilon) \vee 0) \epsilon_x$$

$$\tilde{v}_2 := \sum_{x \in X} ((v_2(\{x\}) - \epsilon) \vee 0) \epsilon_x$$

definiert. Mit

$$(1) \quad \Lambda(\alpha, v) \subset \{ \mu \in M_\sigma(X) : \mu \not\vdash \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2, \mu(x) < v(x) + \epsilon \}$$

$$(2) \quad \subset \{ \mu_1 \in M_\sigma(X) : \mu_1 \not\vdash \tilde{v}_1, \mu_1(x) < v(x) + \epsilon - \tilde{v}_2(x) \}$$

$$+ \{ \mu_2 \in M_\sigma(X) : \mu_2 \not\vdash \tilde{v}_2, \mu_2(x) = \tilde{v}_2(x) \}$$

$$(3) \quad \subset \Lambda(n_\alpha, v_1) + \Lambda(n_\alpha, v_2)$$

ist dann alles gezeigt ("⊢" bedeutet dabei die in Lemma (1.3) definierte Präordnung für $B = G(X)$):

- (1) folgt sofort aus der Definition von $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$.
- (2) ist die Aussage von Lemma (1.3).
- (3) ergibt sich aus den Ungleichungen

$$\tilde{v}_1(G) \geq v_1(G) - |X|\varepsilon \quad \text{für } i \in \{1,2\} \quad \text{und } G \in \mathcal{G}(X),$$

$$v(X) + \varepsilon - \tilde{v}_2(X) \leq v_1(X) + (|X| + 1)\varepsilon,$$

$$\tilde{v}_2(X) \leq v_2(X).$$

Q.e.d.

Der nun folgende Beweis der Offenheit der Addition auf beliebigen topologischen Räumen muß nur noch aufzeigen, warum es genügt, endliche Räume zu betrachten.

(1.5) Satz

Φ_+ ist auf beliebigen topologischen Räumen X offen.

Beweis:

Für $v_1, v_2 \in M_G(X)$, $\alpha = (G, \varepsilon) \in A$ und $v = v_1 + v_2$ wird

$$(+)\quad A(\alpha, v) \subset A(n_\alpha, v_1) + A(n_\alpha, v_2) \quad \text{gezeigt.}$$

Bezeichnet man mit $B_1, \dots, B_m$, $m = n_\alpha - 1$ die Atome der Sigmaalgebra, die von G erzeugt wird, so hängt die Aussage (+) offensichtlich nicht von der Verteilung der beteiligten Maße innerhalb der B_k ab sondern lediglich vom Gesamtmaß auf jedem B_k . Es genügt also, den Raum

$$Y := \{1, \dots, m\},$$

$$\mathcal{G}(Y) := \{I \subset Y : \cup\{B_k : k \in I\} \in G\}$$

zu betrachten.

(Man beachte, daß Y zwar die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation $x_1 \sim x_2 : \Leftrightarrow$ Es gibt $k \in \{1 \dots m\}$ mit $x_i \in B_k$, aber nicht der Quotientenraum bzgl. dieser Relation ist. Vgl. DUGUNDJI, p.125.) Sei $p: X \rightarrow Y$ die Projektion, d.h. für $x \in B_k$ gilt $p(x) = k$. Dann ist Y ein T_0 -Raum und p stetig.

Sei jetzt $\mu \in \Lambda(\alpha, \nu)$. Die Bildmaße von μ, ν, ν_1 und ν_2 bzgl. p seien mit $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}_1$ und $\tilde{\nu}_2$ bezeichnet.

Da für $G \in \mathcal{G}$ offensichtlich $p^{-1}(p(G)) = G$ gilt, folgt

$$\tilde{\mu} \in \Lambda(\beta, \tilde{\nu}) \quad \text{für} \quad \beta = (\mathcal{G}(Y), \epsilon).$$

Mit Lemma (1.4) gibt es also $\tilde{\mu}_1 \in \Lambda(n_\alpha \beta, \tilde{\nu}_1)$ und $\tilde{\mu}_2 \in \Lambda(n_\alpha \beta, \tilde{\nu}_2)$ mit $\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}$ ($n_\alpha = n_\beta$).

Urbilder von $\tilde{\mu}_1$ und $\tilde{\mu}_2$ bzgl. $\tilde{p}$ mit Summe μ sind:

$$\mu_1 := \sum_{i \in I} \tilde{\mu}_1(\{i\}) \frac{1}{\mu(B_1)} \chi_{B_1} \mu$$

$$\mu_2 := \sum_{i \in I} \tilde{\mu}_2(\{i\}) \frac{1}{\mu(B_1)} \chi_{B_1} \mu$$

$$(I := \{i \leq m : \mu(B_1) > 0\}).$$

Wegen $\mu_1 \in \Lambda(n_\alpha \alpha, \nu_1)$ und $\mu_2 \in \Lambda(n_\alpha \alpha, \nu_2)$ ist der Beweis damit beendet. Q.e.d.

Restriktionen offener Abbildungen sind im allgemeinen nicht mehr offen. Eine hinreichende Bedingung für die Offenheit

einer Restriktion von ϕ_+ liefert das folgende

(1.6) Korollar

Sei $c \in \{\sigma, r, \tau, st\}$ und X ein topologischer Raum (Hausdorffraum, falls $c = st$). Sei $\lambda \in]0, 1[$.

Dann sind die Abbildungen

$$(a) \quad \phi_+ : M_c(X) \times M_c(X) \ni (v_1, v_2) \rightarrow v_1 + v_2 \in M_c(X)$$

$$(b) \quad \phi_\lambda : P_c(X) \times P_c(X) \ni (v_1, v_2) \rightarrow \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in P_c(X)$$

offen.

Beweis:

(1) Wegen der Äquivalenz

$$v_1 + v_2 \in M_c(X) \iff v_1, v_2 \in M_c(X)$$

gilt für beliebiges $\Gamma \subset M_\sigma(X) \times M_\sigma(X)$ offensichtlich

$$\phi_+(\Gamma \cap (M_c(X) \times M_c(X))) = \phi_+(\Gamma) \cap M_c(X),$$

womit (a) aus (1.5) folgt.

(2) Wegen (1) ist die Aussage (b) nur noch für $c = \sigma$ zu zeigen. Da für beliebiges $d > 0$ die Abbildung

$$P_\sigma(X) \ni \mu \rightarrow d\mu \ni \{v \in M_\sigma(X) : v(X) = d\}$$

ein Homöomorphismus ist, ist dazu die Offenheit der Abbildung

$$\uparrow_+ : P_\sigma(X) \times P_\sigma(X) \rightarrow 2P_\sigma(X) := \{v \in M_\sigma(X) : v(X) = 2\}$$

zu beweisen. Gezeigt wird für $v_1 \in P_\sigma(X)$, $v := v_1 + v_2$

und $\alpha = (\epsilon, \epsilon)$

$$A(\alpha, v) \cap 2P_\sigma(X) \subset A(2n_\alpha, v_1) \cap P_\sigma(X) + A(2n_\alpha, v_2) \cap P_\sigma(X).$$

- (3) Sei hierzu $\mu \in A(\alpha, v) \cap 2P_\sigma(X)$. Nach dem Beweis von (1.5) gibt es $\mu_1 \in A(n_\alpha, v_1)$ mit $\mu_1 + \mu_2 = \mu$. Die μ_i müssen nur noch, bei konstanter Summe, in Wahrscheinlichkeitsmaße abgeändert werden. Setze dazu für

$$t := \mu_1(X) - 1 = 1 - \mu_2(X)$$

noch

$$\mu_1' := \mu_1 - \frac{t}{\mu_1(X)} \mu_1, \quad \mu_2' := \mu_2 + \frac{t}{\mu_1(X)} \mu_1 \quad \text{falls } t \geq 0$$

bzw.

$$\mu_1' := \mu_1 - \frac{t}{\mu_2(X)} \mu_2, \quad \mu_2' := \mu_2 + \frac{t}{\mu_2(X)} \mu_2 \quad \text{falls } t < 0$$

(Ohne Einschränkung kann $\mu_1(X) > 0$ angenommen werden.)

Da $|t| < \epsilon n_\alpha$ gilt, folgt $\mu_1' \in A(2n_\alpha, v_1)$.

Q.e.d.

Die Resultate von EIFLER (1) und EIFLER (2) sind durch dieses Korollar also abgedeckt.

Eng verwandt mit dem Problem der Offenheit der Addition von Maßen ist die Frage, ob sich eine gegen $\mu + v$ konvergierende

Folge $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_\sigma(X)$ in Folgen $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zerlegen läßt (d.h. $\mu_n + \nu_n = \rho_n$ stets), die gegen μ und ν konvergieren. Man beachte dabei, daß selbst für offene G die Konvergenz von ρ_β gegen ρ nicht diejenige von $\chi_G \rho_\beta$ gegen $\chi_G \rho$ impliziert. In EIFLER (1) und DEGENS wird diese Frage für spezielle Fälle mit anderen als den hier verwendeten Mitteln positiv beantwortet. Allgemeiner ist der folgende

(1.7) Satz

Sei $c \in \{\sigma, r, \tau, st\}$. Sei X ein topologischer Raum (Hausdorffraum falls $c = st$). Ist dann $M_c(X)$ first countable, so gibt es zu jeder gegen $\mu + \nu \in M_c(X)$ konvergenten Folge $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_c(X)$ Folgen von Maßen $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\mu_n + \nu_n = \rho_n$ stets und $\mu_n \rightarrow \mu$, $\nu_n \rightarrow \nu$.

Beweis:

Seien $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(\Gamma_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ absteigende Umgebungsbasen von μ und ν . Wegen (1.5) ist $\Gamma_i + \Gamma_i^1$ eine offene Umgebung von $\mu + \nu$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Es gibt also $N_i \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $n > N_i$ gilt $\rho_n \in \Gamma_i + \Gamma_i^1$. Ohne Einschränkung gelte $N_i \uparrow \infty$. Setze jetzt für $n < N_1$ zum Beispiel $\mu_n := \rho_n$ und $\nu_n = 0$; wähle für $n \in [N_i, N_{i+1}[$ $\mu_n \in \Gamma_i$ und $\nu_n \in \Gamma_i^1$ mit $\mu_n + \nu_n = \rho_n$. Offensichtlich gilt dann $\mu_n \rightarrow \mu$ und $\nu_n \rightarrow \nu$.

Q.e.d.

(1.8) Bemerkung

- (a) Besitzt X eine abzählbare Basis, so gilt dies auch für $M_\sigma(X)$. $M_\sigma(X)$ ist also first countable für beliebiges σ .
- (b) Ist X nur first countable, so muß $M_\sigma(X)$ diese Eigenschaft nicht besitzen.

Beweis:

- (a) TOPSØE, p. 49, 11.2.(iii).
- (b) Ist w_1 die erste überabzählbare Ordinalzahl und $X = [0, w_1[$ mit der Ordnungstopologie versehen, so ist X offensichtlich f.c.

Das Dieudonné-Maß auf X wird durch

$v(B) = 1$, falls B eine unbeschränkte, abgeschlossene Menge enthält und

$v(B) = 0$ sonst (vgl. HALMOS, p.231, (10))

definiert. Unter der Annahme, daß v eine absteigende Umgebungsbasis $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt, gibt es absteigende $\varepsilon_n > 0$ und aufsteigende $\alpha_n \in X$ mit

$$\{\rho \in M_\sigma(X) : \rho(X) < 1 + \varepsilon_n, \rho([\alpha_n, w_1[) > 1 - \varepsilon_n\} \subset \Gamma_n.$$

Da w_1 eine reguläre Kardinalzahl ist, gilt

$\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n < w_1$. Der Widerspruch folgt nun aus der Tatsache, daß kein Γ_n in der offenen Menge

$$\{\rho \in M_\sigma(X) : \rho([\alpha+1, w_1[) > \frac{3}{4}\}$$

enthalten ist.

Q.e.d.

Aus (1.5) folgt sofort die Offenheit der beliebigen endlichen Summenbildung. Diese bleibt auch im abzählbaren Fall erhalten:

(1.9) Satz

Sei X ein topologischer Raum. Seien $a_n \in \mathbb{R}^+$ mit

$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty$. Sei

$$M := \{ (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(X) < \infty \} \subset \prod_{n \in \mathbb{N}} M_0(X).$$

Dann sind

$$\psi_1 : M \ni (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \in M_0(X)$$

$$\psi_2 : \prod_{n \in \mathbb{N}} [0, a_n[P_0(X) \ni (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \in M_0(X)$$

offen.

$$(A P_0(X) := \{a\mu : a \in A, \mu \in P_0(X)\} \quad \text{für } A \subset \mathbb{R}_0^+).$$

Beweis:

Für $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k \in W(X)$ und $\Gamma := \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k \times \prod_{n > k} M_0(X)$ gilt

$$\psi_1(\Gamma \cap M) = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_k + M_0(X) \quad \text{und}$$

$$\psi_2\left(\Gamma \cap \prod_{n \in \mathbb{N}} [0, a_n[P_0(X)\right) = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_k + \{\rho \in M_0(X) : \rho(X) < \sum_{n > k} a_n\}.$$

Die Behauptung folgt also in jedem Fall aus (1.5). Q.e.d.

(1.10) Bemerkung

- (a) Ψ_1 ist nicht stetig, Ψ_2 ist stetig.
- (b) In (1.9) kann σ durch τ, r oder st ersetzt werden, da auch abzählbare konvergente Summen von Maßen genau dann τ -stetig, regulär oder straff sind, wenn dies alle Summanden sind.
- (c) Sind $\Gamma_n \subset [0, a_n] P_\sigma(X)$ offene Mengen, so ist $\sum_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k$ i.a. nicht offen. Betrachte als Beispiel $X = \mathbb{R}$ und

$$\Gamma_n := \{ \rho \in [0, a_n] P_\sigma(X) : \rho(\{2n, 2n+2\}) > 0 \} .$$

Dann ist $\rho := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{2} \epsilon_{2n+1} \in \sum_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$, obwohl kein

$\rho_k := \sum_{n \neq k} \frac{a_n}{2} \epsilon_{2n+1}$ in $\sum_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ liegt und ρ_k gegen

ρ konvergiert. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ ist also nicht offen.

2. Kapitel: DIE ABGESCHLOSSENHEIT DER ADDITION VON MAßEN

In topologischen Vektorräumen ist die Addition im allgemeinen nicht abgeschlossen: $\{ \frac{n^2+1}{n} : n \in \mathbb{N} \} + \{ -n : n \in \mathbb{N} \}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht abgeschlossen. Trotzdem wird in diesem Kapitel die Abgeschlossenheit von ϕ_+ auf den konvexen Kegel $M_G(X)$ gezeigt. Eine Anwendung wird am Schluß gegeben.

Eine Abbildung $f: Y \rightarrow Z$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für offene G in Y die Menge $\{z \in Z : f^{-1}(z) \subset G\}$ offen in Z ist (ENGELKING, p.52). Im folgenden Lemma werden die Mengen $\phi_+^{-1}(\rho)$ beschrieben:

(2.1) Lemma

Sei X ein topologischer Raum und ρ ein Borelmaß auf X .

Seien $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty$.

Dann sind die Unterräume

$$(a) \quad D\rho := \{ \mu \in M_G(X) : \mu \leq \rho \} ,$$

$$(b) \quad E\rho := \{ (\mu, \nu) \in M_G(X) \times M_G(X) : \mu + \nu = \rho \} \quad \text{und}$$

$$(c) \quad S\rho := \{ (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M_G(X)^{\mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n = \rho, \mu_n(X) \leq a_n \text{ stets} \}$$

quasikompakt.

(Ein topologischer Raum heißt quasikompakt, wenn er die übliche Überdeckungseigenschaft besitzt, aber nicht unbedingt ein Hausdorffraum ist.)

Beweis:

(a) $D\rho$ wird als das stetige Bild einer abgeschlossenen

Teilmenge des kompakten Raumes $Y := \prod_{B \in \mathcal{B}(X)} [0, \rho(B)]$

dargestellt. Die Projektionen von Y werden mit p_B bezeichnet. Der Raum

$Y_0 := \{y \in Y : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(X), B_1 \cap B_2 = \emptyset \Rightarrow p_{B_1}(y) + p_{B_2}(y) = p_{B_1 \cup B_2}(y)\}$

ist abgeschlossen in Y , also kompakt.

Die Abbildung $\Psi : Y_0 \rightarrow D\rho$, definiert durch

$\Psi(y)(B) := p_B(y)$ für $y \in Y_0, B \in \mathcal{B}(X)$, ist

- wohldefiniert:

$\Psi(y)(\emptyset) = 0$ stets und für $B_k \in \mathcal{B}(X), k \in \mathbb{N}, B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$
sowie $y \in Y_0$ gilt

$$\Psi(y)(B) - \sum_{k=1}^n \Psi(y)(B_k) = \Psi(y)(B) - \Psi(y)\left(\sum_{k=1}^n B_k\right)$$

$$= \Psi(y)\left(B \setminus \sum_{k=1}^n B_k\right) \leq \rho\left(B \setminus \sum_{k=1}^n B_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$\Psi(y)$ ist also ein Maß.

- stetig, da für $B \in \mathcal{B}(X)$ die Abbildung $y \mapsto \Psi(y)(B) = p_B(y)$ stetig ist.

- bijektiv.

Somit ist $D\rho$ quasikompakt.

(b) folgt wie (a) mittels der Abbildung

$$\Psi' : Y_0 \ni y \mapsto (\Psi(y), \Psi((\rho(B) - p_B(y))_{B \in \mathcal{B}(X)})) \in E\rho.$$

(c) Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Räume $Y_n := \{y \in Y_0 : p_X(y) \leq a_n\}$.

Mit den Y_n ist auch $Z := \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ kompakt. Sei Z_0 die Menge aller der $z = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z$, für die gilt

$$(1) \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad B \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow \sum_{n \leq k} p_B(y_n) \leq \rho(B) \quad \text{und}$$

$$(2) \quad k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \sum_{n \leq k} p_X(y_n) \geq \rho(X) - \sum_{n > k} a_n.$$

Z_0 ist kompakt. Die Abbildung

$$\Psi : Z_0 \ni (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\Psi(y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in S_\rho \quad \text{ist}$$

- wohldefiniert, denn:

Sei $z = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z_0$ und $\tilde{\rho} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \Psi(y_n)$. Wegen (1) folgt sofort $\tilde{\rho} \leq \rho$. Mit (2) folgt dann

$$(\rho - \tilde{\rho})(X) \leq \rho(X) - \sum_{n \leq k} p_X(y_n) \leq \sum_{n > k} a_n \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\rho = \tilde{\rho}$ und $\Psi(z) \in S_\rho$.

- stetig, da Ψ in jeder Komponente stetig ist.

- bijektiv.

Somit ist $S_\rho = \Psi(Z_0)$ quasikompakt.

Q.e.d.

(2.2) Bemerkung

Ist $M_0(X)$ ein Hausdorffraum, so sind die Abbildungen

Ψ , Ψ' und Ψ'' abgeschlossen, also Homöomorphismen.

Die Räume D_ρ , E_ρ und S_ρ sind also zu abgeschlossenen Unterräumen von $[0,1]^I$ homöomorph.

Im dritten Kapitel werden hinreichende Bedingungen für die

Eigenschaft " $M_\sigma(X)$ Hausdorffraum" angegeben. Die dort aufgeführten Beispiele für Nicht-Hausdorffräume $M_\sigma(X)$ zeigen, daß in (2.1) "quasikompakt" nicht durch "kompakt" ersetzt werden kann.

Auch die Abgeschlossenheit von Φ_+ wird durch Reduktion des Problems auf einen endlichen Raum bewiesen. Wiederum geht Lemma (1.4) entscheidend ein.

(2.3) Satz

Für beliebige topologische Räume ist Φ_+ eine abgeschlossene Abbildung.

Beweis:

Wie am Anfang des Kapitels bereits erwähnt, ist für offene $\Gamma_1 \subset M_\sigma(X) \times M_\sigma(X)$ die Offenheit von

$$\Gamma_2 := \{ \rho \in M_\sigma(X) : \exists \rho \in \Gamma_1 \}$$

in $M_\sigma(X)$ zu zeigen. Sei also $\rho \in \Gamma_2$. Wegen Lemma (2.1) gibt es $\alpha_1 \dots \alpha_k \in A$, $\mu_1 \dots \mu_k, \nu_1 \dots \nu_k \in M_\sigma(X)$ mit $\mu_i + \nu_i = \rho$ stets und

$$\begin{aligned} \rho &\subset \bigcup \{ A(\alpha_i, \mu_i) \times A(\alpha_i, \nu_i) : 1 \leq k \} \\ &\subset \bigcup \{ A(2\alpha_i, \mu_i) \times A(2\alpha_i, \nu_i) : 1 \leq k \} \subset \Gamma_1. \end{aligned}$$

Wähle ein $\alpha = (G, \varepsilon) \in A$ mit $\alpha \geq \alpha_i$ stets. Für $K = (4n_\alpha)^{-1}$ wird gezeigt:

$$A(K\alpha, \rho) \subset \Gamma_2.$$

Für beliebige Maße μ_0, ν_0 mit $\rho_0 := \mu_0 + \nu_0 \in A(K\alpha, \rho)$ ist also $(\mu_0, \nu_0) \in \Gamma_1$ zu zeigen. Hierfür ist die Existenz von Maßen $\mu, \nu \in M_0(X)$ mit $\mu + \nu = \rho, \mu_0 \in A(\alpha, \mu)$ und $\nu_0 \in A(\alpha, \nu)$ zu zeigen. Denn dann gibt es ein $i \in \{1 \dots k\}$ mit $(\mu, \nu) \in A(\alpha_1, \mu_1) \times A(\alpha_1, \nu_1)$, und es folgt sofort $(\mu_0, \nu_0) \in A(2\alpha_1, \mu_1) \times A(2\alpha_1, \nu_1) \subset \Gamma_1$.

Zur Konstruktion von μ und ν :

Es handelt sich hier offensichtlich um das umgekehrte Problem wie im Beweis von (1.5). Dort waren μ und ν gegeben und μ_0 bzw. ν_0 gesucht. Um trotzdem (1.4) anwenden zu können, sind die Ungleichheitszeichen umzudrehen oder, äquivalent dazu, im "Quotientenraum" offene und abgeschlossene Mengen zu vertauschen.

Seien also $B_1 \dots B_m, p$ und Y wie im Beweis von (1.5).

Die Topologie ist jetzt

$$\mathcal{G}(Y) := \{I \subset \{1 \dots m\} : \overline{\bigcup \{B_k : k \in I\}} \in \mathcal{G}\}.$$

Wiederum seien $\tilde{\mu}_0, \tilde{\nu}_0, \tilde{\rho}_0$ und $\tilde{\rho}$ die Bildmaße von μ_0, ν_0, ρ_0 und ρ bzgl. p (man beachte, daß p zwar nicht mehr stetig, aber immer noch meßbar ist). Aus $\rho_0 \in A(K\alpha, \rho)$ folgt nun $\tilde{\rho} \in A(2K\alpha', \tilde{\rho}_0)$ für $\alpha' = (\mathcal{G}(Y), \epsilon)$, denn:

$$\tilde{\rho}(Y) = \rho(X) < \rho_0(X) + K\epsilon = \tilde{\rho}_0(Y) + K\epsilon \quad (X \in \mathcal{G}!)$$

$$\tilde{\rho}(I) = \tilde{\rho}(Y) - \tilde{\rho}(Y \setminus I)$$

$$= \rho(X) - \rho(\overline{\bigcup \{B_k : k \in I\}})$$

$$> (\rho_0(X) - K\epsilon) - (\rho_0(\overline{\bigcup \{B_k : k \in I\}}) + K\epsilon)$$

$$= \tilde{\rho}_0(I) - 2K\epsilon \quad \text{für } I \in \mathcal{G}(Y).$$

Jetzt liefert Lemma (1.4) die Existenz von Maßen

$$\tilde{\mu} \in A(\frac{1}{2}\alpha, \tilde{\mu}_0), \quad \tilde{\nu} \in A(\frac{1}{2}\alpha, \tilde{\nu}_0) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mu} + \tilde{\nu} = \tilde{\rho}.$$

Konstruiert man hierzu Urbilder bzgl. $\tilde{\rho}$ wie in dem Beweis von Satz (1.5), d.h. Maße $\mu, \nu \in M_0(X)$ mit $\tilde{\rho}(\mu) = \tilde{\mu}$, $\tilde{\rho}(\nu) = \tilde{\nu}$ und $\mu + \nu = \rho$, so folgt wie oben

$$\mu_0 \in A(\alpha, \mu) \quad \text{und} \quad \nu_0 \in A(\alpha, \nu),$$

womit alles gezeigt ist.

Q.e.d.

Auch Restriktionen abgeschlossener Abbildungen sind i.a. nicht mehr abgeschlossen. Trotzdem gilt (2.3) auch für die keineswegs abgeschlossenen Unterräume $M_c(X)$:

(2.4) Korollar

Sei $c \in \{0, r, \tau, st\}$ und X ein topologischer Raum (Hausdorffraum falls $c = st$). Dann ist die Abbildung

$$M_c(X) \times M_c(X) \ni (\mu, \nu) \mapsto \mu + \nu \in M_c(X)$$

abgeschlossen.

Beweis:

Die Argumentation verläuft wie im Teil (1) des Beweises von (1.6).

Q.e.d.

Die folgende Bemerkung wird im dritten Kapitel verwendet.

(2.5) Bemerkung

Ist X ein topologischer Raum, konvergiert das Netz ρ_β gegen ρ in $M_0(X)$ und gilt $D\rho \subset \Gamma$ für ein offenes Γ ,

so gilt schließlich auch $D\rho_\beta \subset \Gamma$.

Beweis:

Offensichtlich gilt $E\rho \subset \Gamma \times \Gamma$. Da die Menge $\{\mu \in M_\sigma(X) : E\mu \subset \Gamma \times \Gamma\}$ nach Satz (2.3) offen ist, gilt schließlich auch $E\rho_\beta \subset \Gamma \times \Gamma$, also ebenfalls $D\rho_\beta \subset \Gamma$. Q.e.d.

Da klarerweise auch die Menge

$$E_n \rho := \{(\mu_1 \dots \mu_n) : \mu_1 + \dots + \mu_n = \rho\}$$

quasikompakt in $M_\sigma(X)^n$ ist, ist auch die beliebige endliche Summation abgeschlossen. Untersucht man nun in Analogie zu (1.9) die abzählbare Addition auf

$$M = \{(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M_\sigma(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(\mathbb{R}) < \infty\},$$

so ist für $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$ das Bild der abgeschlossenen Menge

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\mu_n \in M_\sigma(\mathbb{R}) : \mu_n = \alpha \epsilon_{q_n}, \alpha \in \mathbb{R}_0^+\} \cap M$$

unter der Abbildung Ψ_1 dicht in $M_\sigma(\mathbb{R})$, aber keineswegs der ganze Raum. Ψ_1 ist also nicht abgeschlossen.

Trotzdem gilt der

(2.6) Satz

Sei X ein topologischer Raum. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ mit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty.$$

Dann ist die Abbildung

$$\Psi_3 : \prod_{k \in \mathbb{N}} [0, a_n] P_\sigma(X) \ni (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \in M_\sigma(X) .$$

abgeschlossen.

Beweis:

Zur Abkürzung sei $A_n := [0, a_n]$ gesetzt. Da $A_1 P_\sigma(X)$ in $M_\sigma(X)$ abgeschlossen ist, kann der Definitionsbereich von Ψ_3 ohne Einschränkung auf

$$Y := M_\sigma(X) \times \prod_{n \geq 2} A_n P_\sigma(X)$$

erweitert werden. Zu zeigen ist wiederum für offene Γ_1 in Y die Offenheit von

$$\Gamma_2 := \{\rho \in M_\sigma(X) : \Psi_3^{-1}(\rho) \subset \Gamma_1\} .$$

Sei demnach $\rho \in \Gamma_2$. $\Psi_3^{-1}(\rho)$ ist nach Lemma (2.1) quasi-kompakt (setze dort $a_1 = \rho(X)$). Es gibt also $N_1, \dots, N_k \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \Lambda$ sowie $(\mu_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \in \Psi_3^{-1}(\rho)$, $i \leq k$, so, daß für

$$U_1 := \left(\bigcup_{i \leq k} A(\alpha_1, \mu_1^i) \times \dots \times A(\alpha_1, \mu_{N_1}^i) \times \prod_{n > N_1} M_\sigma(X) \right) \cap Y$$

und

$$U_2 := \left(\bigcup_{i \leq k} A(2\alpha_1, \mu_1^i) \times \dots \times A(2\alpha_1, \mu_{N_1}^i) \times \prod_{n > N_1} M_\sigma(X) \right) \cap Y$$

gilt: $\Psi_3^{-1}(\rho) \subset U_1 \subset U_2 \subset \Gamma_1$.

Sei $(\theta, \epsilon) = \alpha$ mit $\alpha_1 \leq \alpha$ stets. Sei $M \in \mathbb{N}$ so gewählt,

daß $\sum_{n>M} a_n < \varepsilon$ und $M > N_1$ stets gilt. Ist jetzt p_M die Projektion von Y auf die ersten M Koordinaten, so wird

$$\rho \in \Gamma_0 := \{v: \{(\mu_n)_{n \leq M} \in p_M(Y) : \mu_1 + \dots + \mu_M = v\} \subset p_M(U_1)\} \subset \Gamma_2$$

gezeigt, womit wegen der Abgeschlossenheit der Addition von M Maßen alles bewiesen ist.

$\rho \in \Gamma_0$: Gilt $\mu_1 + \dots + \mu_M = \rho$, so ist $(\mu_1, \dots, \mu_M, 0, \dots) \in \Psi_3^{-1}(\rho)$, also in U_1 . Somit gilt $(\mu_1, \dots, \mu_M) \in p_M(U_1)$.

$\Gamma_0 \subset \Gamma_2$: Sei dazu $v \in \Gamma_0$, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y$ und $v = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$.

Mit $\mu'_1 := \mu_1 + \sum_{n>M} \mu_n$ gilt $\mu'_1 + \mu_2 + \dots + \mu_M = v$, also

auch $(\mu'_1, \mu_2, \dots, \mu_M) \in p_M(U_1)$. Wegen $\mu'_1(X) - \mu_1(X) < \varepsilon$

folgt hieraus $(\mu_1, \dots, \mu_M) \in p_M(U_2)$, also $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in U_2 \subset \Gamma_1$.
Q.e.d.

Wolfgang GRÖMIG hat gezeigt, daß $X^{\mathbb{N}}$ zu einem abgeschlossenen Unterraum von $M_T(X)$ homöomorph ist. Dies hat zur Folge, daß sich Eigenschaften wie Normalität oder Lokalkompaktheit nicht stets von X auf $M_T(X)$ vererben.

Der Beweis der Grömig'schen Aussage ist nun einfach:

(2.7) Satz

Sei X ein Hausdorffraum und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ mit

(+) $a_n > \sum_{i>n} a_i$ stets.

Dann ist die Abbildung

$$\psi_4 : X^{\mathbb{N}} \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \epsilon_{x_n} \in \psi_4(X^{\mathbb{N}}) \subset M_T(X)$$

ein Homöomorphismus.

Beweis:

Nach TOPSØE, p.48 sind die Abbildungen $i_n : X \ni x \rightarrow a_n \epsilon_x \in E_n$ Homöomorphismen auf die abgeschlossenen Mengen

$$E_n := \{a_n \epsilon_x : x \in X\} \subset M_T(X) .$$

Sei ψ_3 wie in (2.6) definiert. Da $E := \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$ eine abgeschlossene Menge im Definitionsbereich bildet, ist $\psi_3|_E$ mit (2.6) und (1.10)(a) abgeschlossen und stetig. Somit ist die wegen (+) injektive Abbildung $\psi_4 = \psi_3 \circ (i_1, i_2, \dots)$ ein Homöomorphismus aufs Bild und $\psi_4(X^{\mathbb{N}}) = \psi_3[E]$ abgeschlossen in $M_T(X)$.

Q.e.d.

3. Kapitel: DIE SUBTRAKTION VON MAßEN

In topologischen Vektorräumen ist die Differenzbildung offensichtlich stetig. Diese Aussage ist für die Räume $M_C(X)$ keineswegs immer richtig, was an einigen Beispielen am Schluß des Kapitels klar gemacht werden wird. Weiterhin wird die Stetigkeit der Subtraktion von Maßen mit der Hausdorff-Eigenschaft des jeweiligen Grundraumes $M_C(X)$ charakterisiert werden. Sodann wird eine Serie von hinreichenden Bedingungen für die Stetigkeit der Subtraktion gegeben.

(3.1) Definition

Für $c \in \{\sigma, r, \tau, st\}$ und einen topologischen Raum X (Hausdorff-Raum falls $c = st$) definieren wir

$$H_C(X) := \{(\mu, \nu) \in M_C(X) \times M_C(X) : \mu \geq \nu\} \subset M_C(X) \times M_C(X) \quad \text{und}$$

$$\Phi_- : H_C(X) \ni (\mu, \nu) \rightarrow \mu - \nu \in M_C(X) \quad .$$

(Auf eine Indizierung von Φ_- durch X und c wird verzichtet.)

Der Vollständigkeit halber zuvor folgender Satz:

(3.2) Satz

Φ_- ist stets offen.

Beweis:

Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \in M_C(X)$, $\mu \in \Gamma_1$, $\nu \in \Gamma_2$ mit $\mu \geq \nu$ und $\rho := \mu - \nu$.

Sei weiterhin ρ_β ein gegen ρ konvergentes Netz in $M_C(X)$. Dann konvergiert das Netz $\rho_\beta + v$ nach (1.2) gegen μ , ist also schließlich in Γ_1 . Es folgt $\rho_\beta = (\rho_\beta + v) - v \in \Phi_-((\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cap H_C(X))$ schließlich und damit die Behauptung. Q.e.d.

Betrachtet man für $x \in X$ die Menge

$$F := \{ (n + \frac{1}{n}) \varepsilon_x, n \varepsilon_x : n \in \mathbb{N} \} \subset H_C(X),$$

so ist $\Phi_-(F)$ offensichtlich nicht abgeschlossen. Die Abgeschlossenheit von Φ_- wird also nicht untersucht.

Die Stetigkeit dieser Abbildung wird wie folgt charakterisiert:

(3.3) Satz

Voraussetzungen wie in (3.1). Dann sind äquivalent:

- (i) Φ_- ist stetig
- (ii) $M_C(X)$ ist ein Hausdorffraum.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Sei ρ_β ein Netz in $M_C(X)$ und $\mu, v \in M_C(X)$ mit $\rho_\beta \rightarrow \mu$ und $\rho_\beta \rightarrow v$. Zu zeigen ist $\mu = v$. Für die "konstanten" Netze $(\mu)_\beta$ und $(v)_\beta$ gilt wegen (i) und (1.2)

$$(\mu)_\beta = (\rho_\beta + \mu) - \rho_\beta \rightarrow (v + \mu) - \mu = v \quad \text{und}$$

$$(\mu)_\beta = (\rho_\beta + v) - \rho_\beta \rightarrow (\mu + v) - v = \mu.$$

Für offene Mengen $G \in \mathcal{G}(X)$ gilt also stets $\mu(G) = \nu(G)$
und damit $\mu = \nu$.

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Sei (μ_β, ν_β) ein Netz in $H_C(X)$ mit $(\mu_\beta, \nu_\beta) \rightarrow (\mu, \nu) \in H_C(X)$.
Gezeigt wird: Zu jedem Subnetz (μ_γ, ν_γ) von (μ_β, ν_β)
gibt es ein Subsubnetz (μ_δ, ν_δ) mit $\mu_\delta - \nu_\delta \rightarrow \mu - \nu$
(vgl. ENGELKING, p.74).

Sei also (μ_γ, ν_γ) ein Subnetz.

(a) $\mu_\gamma - \nu_\gamma$ hat in $D\mu$ einen Häufungspunkt:

Anderenfalls gäbe es für alle $\rho \in D\mu$ eine offene Menge
 Γ_ρ in $M_C(X)$ und ein γ_ρ mit der Eigenschaft, daß
für alle $\gamma \geq \gamma_\rho$ gilt $\mu_\gamma - \nu_\gamma \notin \Gamma_\rho$. Da $D\mu$ nach (2.1)
quasikompakt ist, gibt es $\rho_1 \dots \rho_n \in D\mu$ mit

$D\mu \subset \{\Gamma_{\rho_i} : 1 \leq i \leq n\} =: \Gamma$. Sei $\gamma_0 \geq \gamma_{\rho_1}$ stets.

Für alle $\gamma \geq \gamma_0$ gilt dann $\mu_\gamma - \nu_\gamma \notin \Gamma$. Nach (2.5) ist
aber $D\mu_\gamma$ schließlich eine Teilmenge von Γ , womit
wegen $\mu_\gamma - \nu_\gamma \in D\mu_\gamma$ ein Widerspruch erzielt wäre.

(b) Sei ρ ein Häufungspunkt von $\mu_\gamma - \nu_\gamma$ in $D\mu$. Nach
ENGELKING, p.74 gibt es ein Subnetz $\mu_\delta - \nu_\delta$ von
 $\mu_\gamma - \nu_\gamma$ mit $\mu_\delta - \nu_\delta \rightarrow \rho$. Nach (1.2) folgt dann
 $(\mu_\delta - \nu_\delta) + \nu_\delta \rightarrow \rho + \nu$. Da der Grenzwert eines Netzes
wegen (ii) eindeutig bestimmt ist, folgt $\rho + \nu = \mu$,
also $\rho = \mu - \nu$.

Q.e.d.

Im folgenden wird nun für die verschiedenen Regularitätsannahmen $c \in \{\sigma, r, \tau, st\}$ das jeweils minimale Element der Hierarchie von Trennungseigenschaften (Hausdorff-regulär-vollständig regulär-normal-perfektnormal-metrisierbar) angegeben, welches (i) bzw. (ii) impliziert.

(3.4) Satz

Voraussetzungen wie in (3.3). Dann sind für (i) bzw. (ii) hinreichend:

- (a) $c = \sigma$ und X ist perfektnormal
- (b) $c = r$ und X ist normal
- (c) $c = \tau$ und X ist regulär
- (d) $c = st$ (X Hausdorff)

Beweis:

TOPSØE, p.49 zeigt (ii) in den Fällen (c) und (d). Ich zeige hier simultan für alle Fälle (i):

Für $G \in \mathcal{G}(X)$ ist die Unterhalbstetigkeit von

$H_c(X) \ni (\mu, \nu) \rightarrow \mu(G) - \nu(G)$ zu beweisen, da die Stetigkeit für $G = X$ klar ist. Hinreichend dafür ist

$((\mu, \nu) \in H_c(X) \text{ bel.})$

$$\mu(G) - \nu(G) = \sup \{ \mu(G') - \nu(F') : G \supset G' \subset F', G' \in \mathcal{G}(X), F' \in \mathcal{F}(X) \}$$

(Die $\mathcal{C}_g$ -Funktionen sind abgeschlossen bzgl. Addition und beliebiger Supremumsbildung).

Zu " $\geq$ ":

Seien G', F' wie angegeben. Dann gilt:

$$\mu(G) - \nu(G) = (\mu - \nu)(G) \geq (\mu - \nu)(G') \geq \mu(G') - \nu(F').$$

Zu " $\leq$ ":

(a) Da in perfekten Räumen jede offene Menge eine Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen ist, ist jedes Borelmaß regulär und der Fall (a) geht in den Fall (b) über.

(b) Zu $\mu(G) - \nu(G) > d$ gibt es abgeschlossene Mengen F_1 und F_2 mit $F_1 \subset G$, $F_2 \subset \bar{G}$ und immer noch $\mu(F_1) - \nu(\bar{F}_2) > d$. Da X normal ist, gibt es disjunkte offene Mengen G_1 und G_2 mit $F_1 \subset G_1$ stets. Wähle jetzt $G' := G \cap G_1 \subset G$ und $F' := \bar{G}_2 \supset G_1 \supset G'$ und es gilt

$$\mu(G') - \nu(F') \geq \mu(F_1) - \nu(\bar{F}_2) > d.$$

(c) Da X regulär ist, bildet die Menge aller offener Teilmengen von G , deren Abschluß immer noch in G liegt, ein nach oben gerichtetes gegen G konvergentes System. Zu $\mu(G) - \nu(G) > d$ gibt es also eine Teilmenge G' von G mit $G'^a =: F' \subset G$ und $\mu(G') - \nu(G) > d$ noch immer. Also auch $\mu(G') - \nu(F') \geq \mu(G') - \nu(G) > d$.

(d) Wie (b) unter Ersetzung der abgeschlossenen Mengen durch Kompakta und Beachtung von DUGUNDJI, p.225 (1.5(b)).

Q.e.d.

Es folgen nun drei Gegenbeispiele, die die Minimalität der Voraussetzungen in (3.4) zeigen:

(3.5) Bemerkung

In (3.4) sind nicht hinreichend für (i) oder (ii):

(e) $c = \sigma$ und X kompakt (also normal)

(f) $c = r$ und X vollständig regulär

(g) $c = \tau$ und X Hausdorffraum mit abzählbarer Basis.

Beweis:

(e) Sei w_1 die erste überabzählbare Ordinalzahl ,
 $X_1 := [0, w_1[$ und $X = [0, w_1]$ jeweils versehen mit der Ordnungstopologie.

Sei ν_1 das Dieudonné-Maß auf X_1 (vgl. den Beweis zu (1.10)) und ρ_1 seine triviale Fortsetzung auf X sowie $\rho_2 = \epsilon_{w_1}$. Für beliebige $G \in \mathcal{G}(X)$ gilt also $\rho_2(G) \leq \rho_1(G)$. Jede Umgebung von ρ_2 enthält mithin auch ρ_1 . Damit ist $M_\sigma(X)$ kein T_1 -Raum.

(f) Sei w_2 die erste Ordinalzahl mit $|w_2| > |w_1|$, d.h.
 $w_i = \aleph_i$, $i = 1, 2$.

Seien $X_1 := [0, w_1[$ und $Y_1 := [0, w_1]$ jeweils versehen mit der Ordnungstopologie. Seien ν_1 und ν_2 die Dieudonné-Maße auf X_1 und X_2 , d.h. $\nu_1(B)$ ist genau dann 1, wenn B eine unbeschränkte abgeschlossene Menge in X_1 enthält und 0 sonst (beachte dabei, daß auch $\aleph_2$ eine reguläre Kardinalzahl ist; es gilt also für abzählbare Teilmengen B von X_2 , daß $\sup B < w_2$ ist). Die ν_i sind nach Konstruktion regulär. Definiere $Z := Y_1 \times Y_2$ und $X := Z \setminus \{(w_1, w_2)\}$. Z ist kompakt, also vollständig regulär, und somit ist auch X vollständig regulär. Seien ρ_i die Bildmaße der Dieudonné-Maße unter den Abbildungen

$$X_1 \ni x \rightarrow (x, w_2) \in X$$

und

$$X_2 \ni x \rightarrow (w_1, x) \in X.$$

Die ρ_i sind regulär, da obige Abbildungen abgeschlossen sind (approximiere Urbild von $B \in \mathcal{B}(X)$ von innen).

Geelte jetzt $\rho_i \in \Gamma_i \in \mathcal{W}_r(X)$. Gezeigt wird $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$.

Es gibt $U_1 \dots U_n \in \mathcal{G}(X)$, $\tilde{\gamma}_1 \dots \tilde{\gamma}_n \in \mathbb{R}_0^+$ und $\delta_1 > 0$ mit

$$\rho_i \in \{\rho \in \mathcal{M}_r(X) : \rho(U_i) > \tilde{\gamma}_i \text{ für } 1 \leq i \leq n \text{ und } \rho(X) < \delta_1\} \subset \Gamma_1.$$

Es folgt $\rho_1(\overline{U_1}) = 0$ stets, also $\rho_1(\bigcap_{i \leq n} U_i) = 1$.

Somit gilt für $G_1 := \bigcap_{i \leq n} U_i$ und $\gamma_1 := \max \{\gamma_i : 1 \leq i \leq n\}$:

$$\rho_1 \in \{\rho \in M_r(X) : \rho(G_1) > \gamma_1 \text{ und } \rho(X) < \delta_1\} \subset \Gamma_1.$$

Ganz analog folgt

$$\rho_2 \in \{\rho \in M_r(X) : \rho(G_2) > \gamma_2 \text{ und } \rho(X) < \delta_2\} \subset \Gamma_2$$

für ein $G_2 \in \mathcal{G}(X)$ und $\gamma_2 \geq 0$, $\delta_2 > 0$. Da $\gamma_1 < 1$ und $\delta_1 > 1$ ist, gilt $\epsilon_x \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ für $x \in G_1 \cap G_2$.
Zu zeigen ist also: $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Sei p_1 die Projektion von X auf die erste Koordinate. Die Menge $p_1(\overline{G_1} \cap [0, w_1] \times \{w_2\})$ ist abgeschlossen in X_1 und hat v_1 -Maß 0. Sie ist folglich beschränkt, d.h. es gibt $x_1 < w_1$ mit $]x_1, w_1[\times \{w_2\} \subset G_1$. Genauso gibt es $x_2 < w_2$ mit $\{w_1\} \times]x_2, w_2[\subset G_2$.

Setze $U :=]x_1, w_1[\times]x_2, w_2[$. Jetzt gilt

$$\begin{aligned} - \text{ für } x \in]x_1, w_1[\text{ ist } |\overline{G_1} \cap (\{x\} \times]x_2, w_2[)| &< N_2, \\ \text{also } |\overline{G_1} \cap U| &\leq N_1 \cdot N_2 = N_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{ für } x \in]x_2, w_2[\text{ ist } |G_2 \cap (]x_1, w_1[\times \{x\})| &> 1, \\ \text{also } |G_2 \cap U| &\geq N_2. \end{aligned}$$

Somit ist $G_1 \cap G_2 \cap U \neq \emptyset$.

(g) Sei $C \subset [0, 1]$ eine Menge mit äußerem Lebesgue-Maß 1 und innerem Lebesgue-Maß 0. Versee $X = [0, 1]$ mit

der von den offenen Intervallen und C erzeugten Topologie. Offene Mengen haben dann die Form $G_1 \cup (G_2 \cap C)$ für euklidisch offene G_1 und Borelsche Mengen die Gestalt $(B_1 \cap \bar{C}) \cup (B_2 \cap C)$ für euklidische Borel-Mengen B_1 . Definiere $\rho_1((B_1 \cap \bar{C}) \cup (B_2 \cap C)) := \lambda(B_1)$ für das Lebesguemaß λ (vgl. HALMOS, p.71(2)). Da X eine abzählbare Basis besitzt, sind die Maße τ -stetig. $M_\tau(X)$ ist kein T_1 -Raum, da für G_1 wie oben gilt:

$$\rho_1(G_1 \cup (G_2 \cap C)) = \lambda(G_1) \leq \lambda(G_1 \cup G_2) = \rho_2((G_1 \cup (G_2 \cap C))).$$

Q.e.d.

4. Kapitel: DIE INFIMUMS-UND SUPREMUMSABBILDUNGEN

Für beliebige topologische Räume X existieren in $M_0(X)$ Infimum und Supremum zweier Maße bezüglich der üblichen Ordnung. Sind f_1 und f_2 die Radon-Nikodym-Dichten der Maße μ_1 und μ_2 bzgl. $\mu := \mu_1 + \mu_2$, so gilt

$$\begin{aligned}\mu_1 \wedge \mu_2 &:= \inf \{ \mu_1, \mu_2 \} = \inf \{ f_1, f_2 \} \mu, \\ \mu_1 \vee \mu_2 &:= \sup \{ \mu_1, \mu_2 \} = \sup \{ f_1, f_2 \} \mu.\end{aligned}$$

Infimums- und Supremumsabbildung sind in $M_0(X)$ im allgemeinen nicht stetig: Ist X ein T_1 -Raum und $(x_\beta)_\beta$ ein gegen $x \in X$ konvergentes Netz mit $x_\beta \neq x$ stets, so gilt

$$\begin{aligned}\lim (\epsilon_{x_\beta} \wedge \epsilon_x) &\neq (\lim \epsilon_{x_\beta}) \wedge \epsilon_x, \\ \lim (\epsilon_{x_\beta} \vee \epsilon_x) &\neq (\lim \epsilon_{x_\beta}) \vee \epsilon_x.\end{aligned}$$

In diesem Kapitel werden also lediglich Offenheit, Abgeschlossenheit und Borel-Meßbarkeit der folgenden Abbildungen untersucht:

(4.1) Definition

Für $c \in \{\sigma, r, \tau, st\}$ und einen topologischen Raum X (Hausdorffraum falls $c = st$) werden definiert

$$\begin{aligned}\Phi_\wedge: M_c(X)^2 &\ni (\mu, \nu) \mapsto \mu \wedge \nu \in M_c(X), \\ \Phi_\vee: M_c(X)^2 &\ni (\mu, \nu) \mapsto \mu \vee \nu \in M_c(X).\end{aligned}$$

Der Beweis des folgenden Satzes ähnelt dem Beweis der Offenheit von Φ_- .

(4.2) Satz

Unter den Voraussetzungen von (4.1) ist $\Phi_\wedge$ offen.

Beweis:

Sei $(\mu_1, \mu_2) \in M_C(X)^2$ und $\rho := \mu_1 \wedge \mu_2$.

Für ein Netz ρ_β , welches in $M_C(X)$ gegen ρ konvergiert, gilt nach (1.2) die Konvergenz von $\mu_1^\beta := (\mu_1 - \rho) + \rho_\beta$ gegen μ_1 . Wegen $\mu_1^\beta \wedge \mu_2^\beta = \rho_\beta$ ist damit alles gezeigt. Q.e.d.

Für die weiteren Aussagen zur Offenheit von Φ_v und den Meßbarkeitsfragen sind Bedingungen an die Topologie des Raumes X notwendig. Die zentrale Rolle spielt hierbei das folgende

(4.3) Lemma:

Sei X ein topologischer Raum, μ_1 und μ_2 Maße aus $M_C(X)$, $F \in \mathcal{F}(X)$, $G \in \mathcal{G}(X)$. Ist dann eine der Bedingungen

- (a) $c = \sigma$ und X ist perfektnormal,
- (b) $c = r$ und X ist normal,
- (c) $c = \tau$ und X ist regulär,
- (d) $c = st$ und X ist ein Hausdorffraum

gültig, so folgt:

$$(I) \quad (\mu_1 \wedge \mu_2)(F) = \inf \{ \mu_1(F_1) + \mu_2(F_2) : F_1 \in \mathcal{F}(X) \text{ mit } F_1 \cup F_2 \supset F \} ,$$

$$(II) \quad (\mu_1 \vee \mu_2)(G) = \sup \{ \mu_1(G_1) + \mu_2(G_2) : G_1 \in \mathcal{G}(X) \text{ mit } G_1 \cap G_2 = \emptyset \\ \text{und } G_1 \subset G \} .$$

Beweis:

Offensichtlich ist (II) nur für $G = X$ zu zeigen. Dies folgt aus (I) wegen der Gleichung

$$(\mu_1 \vee \mu_2)(X) = \mu_1(X) + \mu_2(X) - (\mu_1 \wedge \mu_2)(X) .$$

Zu (I):

Für $F_1 \in \mathcal{F}(X)$ mit $F_1 \cup F_2 \supset F$ gilt

$$(\mu_1 \wedge \mu_2)(F) \leq (\mu_1 \wedge \mu_2)(F_1) + (\mu_1 \wedge \mu_2)(F_2) \leq \mu_1(F_1) + \mu_2(F_2) .$$

In (I) ist also nur noch die andere Ungleichung zu zeigen.

Sei dazu $(\mu_1 \wedge \mu_2)(F) < \gamma$. Es gibt also $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(X)$ mit $B_1 + B_2 = F$ und $\mu_1(B_1) + \mu_2(B_2) < \gamma$.

In den Fällen (a) und (b) liefert die Regularität der Maße die Existenz von offenen $G_1 \supset B_1$ mit $\mu_1(G_1) + \mu_2(G_2) < \gamma$ noch immer. Die Mengen $F \cap \overline{G_1}$ sind dann disjunkt und können durch offene $U_1 \supset F \cap \overline{G_1}$ getrennt werden $(U_1 \cap U_2 = \emptyset)$.

Mit $F_1 := \overline{U_1} \cap F$ und $F_2 := \overline{U_2} \cap F$ gilt

$$F_1 \cup F_2 = F \cap (\overline{U_2} \cup \overline{U_1}) = F \cap (\overline{U_2 \cap U_1}) = F \quad \text{und}$$

$$\mu_1(F_1) + \mu_2(F_2) \leq \mu_1(F \cap (\overline{F} \cup G_1)) + \mu_2(F \cap (\overline{F} \cup G_2))$$

$$\leq \mu_1(G_1) + \mu_2(G_2) < \gamma .$$

Beachtet man, daß für straffe Maße die G_i mit kompakten Komplementen gewählt werden können, so verläuft der Beweis im Fall (d) analog.

Im Fall (c) liefert die Regularität von μ_1 eine offene Menge $G \supset B_1$ mit $\mu_1(G) + \mu_2(F \cap \overline{G}) < \gamma$. Weiterhin gibt es eine offene Teilmenge G_1 von $\overline{F \cap \overline{G}}$ mit $G_1^a \subset \overline{F \cap \overline{G}}$ und $\mu_1(G) + \mu_2(\overline{G_1}) < \gamma$. Für $F_1 := G_1^a \cap F$ und $F_2 := \overline{G_1}$ gilt

$$F_1 \cup F_2 = (G_1^a \cap F) \cup \overline{G_1} \supset (G_1 \cap F) \cup \overline{G_1} \supset F$$

sowie

$$\mu_1(F_1) + \mu_2(F_2) \leq \mu_1(\overline{F \cap \overline{G}} \cap F) + \mu_2(\overline{G_1}) \leq \mu_1(G) + \mu_2(\overline{G_1}) < \gamma .$$

Q.e.d.

(4.4) Bemerkung

Gilt Aussage (I), so folgt für in $M_C^2(X)$ gegen (μ, ν) konvergente Netze $(\mu_\beta, \nu_\beta)_\beta$ aus der Annahme $\mu \wedge \nu = 0$ die Konvergenz von $\mu_\beta \wedge \nu_\beta$ gegen 0, also eine "schwache" Stetigkeitsaussage.

Mit diesen Hilfsaussagen und der Offenheit der Addition ist nun die Offenheit der Supremumsabbildungen leicht zu zeigen.

(4.5) Satz

Unter einer der Voraussetzungen (a)-(d) von (4.3) ist

Φ_v offen.

Beweis:

Sei $(\mu, \nu) \in M_C(X)^2$ und $\rho := \mu \vee \nu$. Für $\alpha \in A$ sei $\rho_\alpha \in A(n_\alpha^{-2} \alpha, \rho)$. Das Netz ρ_α konvergiert also gegen ρ . Zu zeigen ist die Existenz von Maßen $\mu_\alpha, \nu_\alpha \in M_C(X)$, für die $\mu_\alpha + \mu$, $\nu_\alpha + \nu$ und $\mu_\alpha \vee \nu_\alpha = \rho_\alpha$ gilt.

Mit dem Beweis von (1.5) gibt es Maße $\rho_\alpha^1 \in A(\alpha, \mu - \mu \wedge \nu)$, $\rho_\alpha^2 \in A(\alpha, \nu - \mu \wedge \nu)$ und $\rho_\alpha^3 \in A(\alpha, \mu \wedge \nu)$ mit $\rho_\alpha^1 + \rho_\alpha^2 + \rho_\alpha^3 = \rho_\alpha$.

Wegen (4.4) konvergiert das Netz $\rho_\alpha^1 \wedge \rho_\alpha^2 =: \delta_\alpha + 0$.

Mit (1.2) konvergieren also die Netze

$$\mu_\alpha := \rho_\alpha^1 + \rho_\alpha^3 + \delta_\alpha + \mu$$

und

$$\nu_\alpha := \rho_\alpha^2 + \rho_\alpha^3 + \delta_\alpha + \nu.$$

Weiterhin gilt:

$$\mu_\alpha \vee \nu_\alpha = (\rho_\alpha^1 \vee \rho_\alpha^2) + \rho_\alpha^3 + \delta_\alpha = \rho_\alpha^1 + \rho_\alpha^2 - \delta_\alpha + \rho_\alpha^3 + \delta_\alpha = \rho_\alpha.$$

Q.e.d.

(4.6) Beispiele

Für die Offenheit von Φ_V sind die Bedingungen

(e) $c = \sigma$ und X ist kompakt,

(f) $c = r$ und X ist vollständig regulär

nicht hinreichend.

Beweis:

Wähle zu (e) wie in (3.5) (e) $X = [0, w_1]$ und ρ_1 als Fortsetzung des Dieudonnémaßes sowie $\rho_2 = \epsilon_{w_1}$. Für

$$\Gamma := \{ \mu \in M_\sigma(X) : \mu(X) < 3/2 \}$$

ist nun $\Gamma \vee \Gamma$ nicht offen. Wäre es offen, so enthielte es mit $\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 + \rho_2$ auch $2\rho_1$, was unmöglich ist, da das Supremum zweier Maße nur dann $2\rho_1$ liefert, wenn eines der Maße $2\rho_1$ ist.

Wähle zu (f) X, ρ_1, ρ_2 wie in (3.5) (f). Dort wurde gezeigt, daß es ein Netz $(\rho_\beta)_\beta$ in $M_r(X)$ bestehend aus Diracmaßen gibt, welches sowohl gegen ρ_1 als auch gegen ρ_2 konvergiert. Setzt man wie oben

$$\Gamma := \{ \mu \in M_r(X) : \rho(X) < \frac{3}{2} \} ,$$

so ist auch in diesem Fall $\Gamma \vee \Gamma$ nicht offen, da es zwar $\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 + \rho_2$, aber keines der $2\rho_\beta$ enthält. Q.e.d.

(4.7) Bemerkung

Sind $x, y, z, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verschiedene Punkte in X und gilt $x_n \rightarrow x$, sowie $y_n \rightarrow x$, so sind die Mengen

$$\Phi_{\wedge}(\{(n\epsilon_x + \frac{1}{n}\epsilon_y, n\epsilon_z + \frac{1}{n}\epsilon_y) : n \in \mathbb{N}\}) \quad \text{und}$$

$$\Phi_{\vee}(\{(\epsilon_{x_n}, \epsilon_{y_n}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(\epsilon_x, \epsilon_x)\}) \quad \text{nicht abgeschlossen}$$

in $M_{\sigma}(X)$. Die Abgeschlossenheit der fraglichen Abbildungen wird also in diesem Kapitel nicht weiter untersucht.

Für die verbleibende Frage nach der Meßbarkeit des Infimums- und Supremumsabbildung ist die wesentliche Arbeit mit Lemma (4.3) schon geleistet worden.

(4.8) Satz

Unter einer der Voraussetzungen (a)-(d) aus (4.3) sind die Abbildungen $\Phi_{\wedge}$ und $\Phi_{\vee}$ Borelmeßbar.

Beweis:

(1) Eine beliebige offene Menge aus $M_{\sigma}(X)$ hat die Darstellung

$$\begin{aligned} \Gamma &= \bigcup_{\delta \in \mathbb{Q}} \left(\bigcup_{i \in I_{\delta}} \{(\rho \in M_{\sigma}(X) : \rho(X) < \delta) \cap \bigcap_{j \in J_1} \{\rho \in M_{\sigma}(X) : \rho(G_j) > \gamma_j\}\} \right) \\ &= \bigcup_{\delta \in \mathbb{Q}} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{(\rho \in M_{\sigma}(X) : \rho(X) > \delta - \frac{1}{n}) \cap \bigcup_{i \in I_{\delta}} \bigcap_{j \in J_1} \{(\rho \in M_{\sigma}(X) : \rho(G_j) > \gamma_j)\}\}} \right) \end{aligned}$$

für $G_j \in \mathcal{G}(X)$, $\gamma_j \in \mathbb{R}_0^+$ und endliche J_1 .

Für die Meßbarkeit einer Abbildung in $M_C(X)$ ist also nur die Offenheit der Urbilder von

$$\Gamma_0 := \{\rho \in M_C(X) : \rho(G) > \gamma\}$$

für $G \in \mathcal{G}(X)$ und $\gamma \in \mathbb{R}_0^+$ zu zeigen.

Es gilt wegen (4.3) (II)

$$(\mu_1, \mu_2) \in \Phi_V^{-1}[\Gamma_0] \iff \text{Es gibt disjunkte } G_1 \in \mathcal{G}(G) \text{ mit}$$

$$\mu_1(G_1) + \mu_2(G_2) > \gamma,$$

womit für die Supremumsabbildung alles gezeigt ist.

(2) Für die Infimumsabbildung argumentiert man analog mit

(4.3) (I) und der Darstellung von Γ durch $F_j \in \mathcal{F}(X)$.

Q.e.d.

Es bleibt abschließend zu bemerken, daß sich alle Aussagen sofort auf die abzählbare Infimums- bzw. Supremumsbildung verallgemeinern lassen.

5. Kapitel: DIE BILDMAßABBILDUNG

Jede Borel-meßbare Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen induziert eine Abbildung $\tilde{\varphi}$, die jedem Borelmaß auf X sein Bildmaß bzgl. φ zuweist. EIFLER (1) zeigt für polnische Räume und stetige, surjektive φ die Äquivalenz der Offenheit von $\tilde{\varphi}$ mit derjenigen von φ . Diese Aussage wird hier für meßbare φ zwischen Suslinräumen bewiesen. Weiterhin wird klar werden, daß die topologischen Voraussetzungen an X und Y in erster Linie für die "lokale" Surjektivität von $\tilde{\varphi}$ benötigt werden, d.h. daß der Schritt von der "lokalen" Surjektivität zur Offenheit von $\tilde{\varphi}$ ohne weitere Voraussetzungen möglich ist. Wichtigste Beweisidee, die auch der Arbeit von Eifler zugrundelag, ist hierbei die Verwendung der Offenheit der Addition zur Konstruktion offener Mengen im Wertebereich von $\tilde{\varphi}$. Am Ende des Kapitels werden Beispiele gegeben, die, indem sie Verallgemeinerungen ausschließen, die gewonnenen Ergebnisse abrunden.

Der zweite Teil der folgenden Definition wird sich als nützlich erweisen:

(5.1) Definition

Seien X und Y Hausdorffräume und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Borel-meßbare Abbildung. Definiere jetzt

- (1) $\tilde{\varphi} : M_G(X) \ni \mu \rightarrow \tilde{\varphi}(\mu) \in M_G(Y)$
- (2) $\tilde{\varphi}$ heißt "lokal surjektiv" genau dann, wenn für alle $G \in \mathcal{G}(X)$ mit meßbarem Bild $\varphi(G)$ gilt
- (+) $\tilde{\varphi}(\{\mu \in M_G(X) : \mu(\bar{G}) = 0\}) = \{\mu \in M_G(Y) : \mu(\overline{\varphi(G)}) = 0\}$
- (d.h. " $\tilde{\varphi}(M_G(G)) = M_G(\varphi(G))$ ") .

Die nun folgende Bemerkung begründet, warum in der Definition (5.1)(2) die Aussage (+) nur für $G \in \mathcal{G}(X)$ verlangt wurde. Man beachte, daß die im Beweis zitierte Arbeit von Banach und Kuratowski die Kontinuumshypothese voraussetzt.

(5.2) Bemerkung

Auch für offene, stetige und surjektive φ mit einer offenen und lokalsurjektiven Abbildung $\tilde{\varphi}$ gilt i.a. die Aussage (+) in (5.1) nicht für " $\mathcal{G}_{\delta}(X)$ " oder " $\mathcal{G}_F(X)$ " .

Beweis:

Für $i \in \mathbb{R}$ sei $X_i = \mathbb{R} \times \{i\}$ mit der euklidischen Topologie.

Sei X der Summenraum der $(X_i)_{i \in \mathbb{R}}$. Die Abbildung

$\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei die Projektion auf die erste Koordinate.

Dann gilt

- (1) φ ist stetig, offen und surjektiv.
- (2) $\tilde{\varphi}$ ist lokalsurjektiv:

Da $\mathbb{R}$ ein starker Lindelöfraum ist, gibt es zu

$G \in \mathcal{G}(X)$ Zahlen $(i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit

$\varphi[G] = \bigcup \{\varphi(G \cap X_{i_n}) : n \in \mathbb{N}\}$.

Ein $\mu \in M_{\sigma}(\mathbb{R})$ mit $\mu(\overline{\varphi(G)}) = 0$ läßt sich also

in $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_{\sigma}(\mathbb{R})$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n = \mu$ so zerlegen,

daß $\mu_n(\overline{\varphi(G \cap X_{\frac{1}{n}})}) = 0$ stets gilt. Da die Restriktion von φ auf $X_{\frac{1}{n}}$ ein Homöomorphismus ist, ist damit alles gezeigt.

(3) $\tilde{\varphi}$ ist mit dem noch zu zeigenden Satz (5.6) offen.

(4) Für

$$F := \{(x, x) : x \in X\} \in \mathcal{F}(X) \cap \mathcal{G}_{\delta}(X)$$

gilt $\varphi[F] = \mathbb{R}$. Weiterhin hat das auf $[0, 1]$ eingeschränkte Lebesguemaß $\lambda \in M_{\sigma}(\mathbb{R})$ kein Urbild bzgl. $\tilde{\varphi}$, das ganz auf F konzentriert ist. Dies folgt aus dem Resultat von BANACH/KURATOWSKI, welches von 0 verschiedene atomlose Maße auf $\mathcal{B}(F) = \mathcal{P}(F)$ ausschließt.

Q.e.d.

Die Stetigkeit von $\tilde{\varphi}$ läßt sich leicht charakterisieren.

(5.3) Satz

Unter den Voraussetzungen von Definition (5.1) ist $\tilde{\varphi}$ genau dann stetig, wenn φ stetig ist.

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Für die Einbettungen $i_X : X \ni x \mapsto \varepsilon_x \in i_X(X) \subset M_{\sigma}(X)$

und $i_Y : Y \rightarrow i_Y(Y)$ gilt $\varphi = i_Y^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ i_X$.

" $\Leftarrow$ ": Ist φ stetig, so ist die Abbildung

$$\mu + \tilde{\varphi}(\mu)(G) = \mu(\varphi^{-1}(G))$$

für $G \in \mathcal{G}(Y)$ unterhalbstetig.

Q.e.d.

(5.4) Bemerkung

Für $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \{0\}$ und $F := \{ \frac{n+1}{n} \epsilon_n : n \in \mathbb{N} \} \in \mathcal{F}(M_0(\mathbb{R}))$ ist $\tilde{\varphi}(F)$ nicht abgeschlossen. Weitere Untersuchungen über die Abgeschlossenheit der Bildmaßabbildung erscheinen darum nicht sinnvoll.

Zunächst sollen die notwendigen Voraussetzungen für die Offenheit von $\tilde{\varphi}$ geklärt werden.

(5.5) Satz

Unter den Voraussetzungen von Definition (5.1) gelten die Implikationen

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \text{ offen} &\Rightarrow \tilde{\varphi} \text{ surjektiv} \Rightarrow \varphi \text{ surjektiv} \quad \text{und} \\ \tilde{\varphi} \text{ offen} &\Rightarrow \varphi \text{ offen.} \end{aligned}$$

Beweis:

(1) Ist $\tilde{\varphi}$ offen, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit

$$\tilde{\varphi}(M_0(X)) \supset \{ \rho \in M_0(Y) : \rho(Y) < \epsilon \}.$$

Wegen der Gleichung $\tilde{\varphi}(\lambda\mu) = \lambda\tilde{\varphi}(\mu)$ für $\lambda \geq 0$ ist damit $\tilde{\varphi}$ surjektiv.

(2) Ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv, so gibt es zu $y \in Y$ ein $\mu \in M_0(X)$ mit $\tilde{\varphi}(\mu) = \epsilon_y$. Wegen $1 = \epsilon_y(\{y\}) = \mu(\varphi^{-1}(\{y\}))$ ist

also φ surjektiv.

(3) Sei $\tilde{\varphi}$ offen, $x \in G \in \mathcal{G}(X)$ mit i_Y wie im Beweis von (5.3).

Für

$$\Gamma := \{ \mu \in M_{\sigma}(X) : \mu(G) > \frac{1}{2} \}$$

gilt also

$$\varepsilon_{\varphi(x)} \in \tilde{\varphi}(\Gamma) \in w(Y) .$$

Die Menge

$$U := i_Y^{-1} [\tilde{\varphi}(\Gamma) \cap i_Y(Y)]$$

ist demnach eine Umgebung von $\varphi(x)$. Es bleibt

$U \subset \varphi(G)$ zu zeigen.

Sei dazu $y \in Y$ und $\mu \in \Gamma$ mit $\tilde{\varphi}(\mu) = \varepsilon_y$. Es folgt

$$\varepsilon_y(\varphi(G)) = \mu(\varphi^{-1}(\varphi(G))) \geq \mu(G) > \frac{1}{2} ,$$

also $y \in \varphi(G)$.

Q.e.d.

Eine hinreichende Bedingung liefert der folgende Satz:

(5.6) Satz

Ist unter den Voraussetzungen von (5.1) φ zusätzlich offen und surjektiv sowie $\tilde{\varphi}$ lokal surjektiv, so ist $\tilde{\varphi}$ offen.

Beweis:

(1) Sei $\mu \in M_{\sigma}(X)$, $\varepsilon > 0$, $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}(X)$ und $a > \mu(X)$.

Dann ist für

$$\Gamma := \{v \in M_{\sigma}(X) : v(G_i) > \mu(G_i) - \varepsilon \text{ für } i \leq n, v(X) < a\}$$

zu zeigen, daß $\tilde{\varphi}(\Gamma)$ eine Umgebung von $\tilde{\varphi}(\mu)$ bildet.

Ist $\mu = 0$, so folgt wegen der Surjektivität von $\tilde{\varphi}$ sofort

$$\tilde{\varphi}(\Gamma) = \{v \in M_{\sigma}(X) : v(Y) < a\}.$$

Ohne Einschränkung kann also $\mu(X) = 1$ angenommen werden.

Ebenfalls ohne Einschränkung wird noch

$$\frac{\varepsilon}{2a} < 1 \text{ und } a < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

vorausgesetzt (wähle $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ mit $\varepsilon'/(2a) < 1$ sowie $t \in]0, 1[$ mit $1 - \varepsilon'/(2a) < 1/(ta) < 1$ und ersetze ε durch $\varepsilon'' := t\varepsilon' \leq \varepsilon$ sowie a durch $a'' := ta \leq a$).

(2) An dieser Stelle geht nun die schon erwähnte Idee von Eifler ein. Das Maß μ wird als konvexe Kombination von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_j , die Umgebung von $\tilde{\varphi}(\mu)$ als konvexe Kombination von Umgebungen von $\tilde{\varphi}(\mu_j)$ dargestellt.

Seien $B_1, \dots, B_m$ diejenigen Atome der von $\{G_i : i \leq n\}$ erzeugten σ -Algebra in X , die keine μ -Nullmengen sind. Setze für $j \in \{1 \dots m\}$

$$\lambda_j := \mu(B_j) \text{ und } \mu_j := \lambda_j^{-1} \chi_{B_j} \mu \in P_{\sigma}(X).$$

Es folgt

$$(i) \quad \sum_{j \leq m} \lambda_j \mu_j = \mu .$$

$$(ii) \quad \sum_{j \leq m} \lambda_j = 1 .$$

(iii) Für $1 \leq n$ und $j \leq m$ gilt entweder $B_j \subset G_1$
oder $B_j \cap G_1 = \emptyset$.

Setzt man weiterhin für $j \leq m$

$$\Gamma_j := \{v \in M_\sigma(X) : v(G_1) > \mu_j(G_1) - \varepsilon \text{ für } 1 \leq n, v(X) < a\} ,$$

so folgt sofort

$$(iv) \quad \sum_{j \leq m} \lambda_j \Gamma_j \subset \Gamma ,$$

$$(v) \quad \tilde{\varphi}(\mu) = \sum_{j \leq m} \lambda_j \tilde{\varphi}(\mu_j) \in \sum_{j \leq m} \lambda_j \tilde{\varphi}(\Gamma_j) \subset \tilde{\varphi}(\Gamma) ,$$

womit wegen (1.6) nur noch zu zeigen ist, daß $\tilde{\varphi}(\Gamma_j)$
eine Umgebung von $\tilde{\varphi}(\mu_j)$ bildet. Dies ist wegen (iii)
und $\mu_j(\overline{B_j}) = 0$ eine offensichtliche Vereinfachung
des Problems.

(3) Sei also $j \leq m$. Für $U = \bigcap \{G_1 : B_j \subset G_1\}$ und

$$\Gamma' := \{\rho \in M_\sigma(X) : \rho(U) > 1 - \varepsilon \text{ und } \rho(X) < a\}$$

gilt dann wegen (iii) $\mu_j \in \Gamma' \subset \Gamma_j$.

Mit

$$V := \varphi(U) \in \mathcal{G}(Y)$$

reicht es also ,

$$\Gamma_0 := \{v \in M_0(Y) : v(V) > a(1 - \frac{\epsilon}{2a}) \text{ und } v(Y) < a\} \subset \tilde{\varphi}(\Gamma')$$

zu zeigen $(\tilde{\varphi}(\mu_j))(V) = 1 > a - \frac{\epsilon}{2}$ impliziert $\tilde{\varphi}(\mu_j) \in \Gamma_0$.

(4) Sei dazu $v \in \Gamma_0$.

Es gibt $v_1, v_2 \in M_0(Y)$ mit $v_1(Y) = v_2(Y) = v(Y)$,

$v_2(\bar{V}) = 0$ und

$$v = \epsilon/(2a)v_1 + (1-\epsilon/(2a))v_2 ,$$

denn:

Wegen $v(V) > (1-\epsilon/(2a))a$ und $a > v(Y)$ gibt es ein

$t \in]0, 1[$ mit $t \cdot v(V) = (1-\epsilon/(2a))v(Y)$. Wähle dann

$$v_1 := 2a/\epsilon(v-t\chi_V v) \text{ und } v_2 := (1-\epsilon/(2a))^{-1}t\chi_V v .$$

Die lokale Surjektivität von $\tilde{\varphi}$ liefert jetzt Maße

$\rho_1 \in M_0(X)$ mit $\tilde{\varphi}(\rho_1) = v_1$ und $\rho_2(\bar{U}) = 0$. Für

$$\rho := \epsilon/(2a)\rho_1 + (1-\epsilon/(2a))\rho_2$$

gilt dann $\tilde{\varphi}(\rho) = v$, so daß nur noch $\rho \in \Gamma'$ zu zeigen bleibt.

(5) Klarerweise gilt $\rho(X) < a$, da dies für die ρ_1 richtig ist. Desweiteren folgt

$$\begin{aligned}
 \rho(U) - 1 &= \frac{\epsilon}{2a} (\rho_1(U) - 1) + (1 - \frac{\epsilon}{2a}) (\rho_2(U) - 1) \\
 &\geq -\frac{\epsilon}{2a} + (1 - \frac{\epsilon}{2a}) (\rho_2(X) - 1) \\
 &> -\frac{\epsilon}{2} + (1 - \frac{\epsilon}{2a}) (\nu(Y) - 1) \\
 &> -\frac{\epsilon}{2} + (1 - \frac{\epsilon}{2a}) (a - \frac{\epsilon}{2} - 1) \\
 &> -\frac{\epsilon}{2} + (1 - \frac{\epsilon}{2a}) (-\frac{\epsilon}{2}) > -\epsilon.
 \end{aligned}$$

Q.e.d.

(5.5) und (5.6) werden nun zu einer Verallgemeinerung des Satzes von Eifler auf Suslinräume zusammengefaßt. (Ein Hausdorffraum heißt Suslinraum, wenn er stetiges Bild eines polnischen Raumes ist.)

(5.7) Satz

Seien X und Y Suslinräume und $\varphi : X \rightarrow Y$ Borel-meßbar. Dann sind äquivalent:

- (i) φ ist offen und surjektiv;
- (ii) $\tilde{\varphi} : M_0(X) \rightarrow M_0(Y)$ ist offen;
- (iii) $\tilde{\varphi} : P_0(X) \rightarrow P_0(Y)$ ist offen.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Unter Beachtung von (5.6) ist die lokale Surjektivität von $\tilde{\varphi}$ zu zeigen.

(1) Für Suslinräume Z_1 und Z_2 und eine Borel-meßbare

surjektive Abbildung $f: Z_1 \rightarrow Z_2$ ist $\tilde{f}$ surjektiv:

Sei $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(Z_2)$. Nach SCHWARTZ, p.122 ist μ straff.

Es gibt somit (SCHWARTZ, p.128, Korollar 1) eine

$\mathcal{B}(Z_2)_\mu - \mathcal{B}(Z_1)$ -meßbare Abbildung $g: Z_2 \rightarrow Z_1$ mit $f \circ g = \text{id}_{Z_2}$ (Hierbei ist $\mathcal{B}(Z_2)_\mu$ die Vervollständigung von $\mathcal{B}(Z_1)$ bzgl. μ). Ist $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf $\mathcal{B}(Z_2)_\mu$ und $\nu := \tilde{g}(\tilde{\mu})$, so folgt für $B \in \mathcal{B}(Z_2)$

$$\tilde{f}(\nu)(B) = \tilde{\mu}(g^{-1}(f^{-1}(B))) = \tilde{\mu}((f \circ g)^{-1}(B)) = \tilde{\mu}(B) = \mu(B) ,$$

also $\mu = \tilde{f}(\nu)$.

(2) Für $G \in \mathcal{G}(X)$ sind die offenen Unterräume G und $\varphi(G)$ wiederum Suslinräume. Die lokale Surjektivität von $\tilde{\varphi}$ folgt also aus (1).

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Für $\Gamma \in \mathcal{W}(X)$ gilt

$$\tilde{\varphi}(\Gamma \cap P_\sigma(X)) = \tilde{\varphi}(\Gamma) \cap P_\sigma(Y) .$$

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Die Offenheit von φ folgt wie im Beweis von (5.5). Zu zeigen ist die Surjektivität von $\tilde{\varphi}: P_\sigma(X) \rightarrow P_\sigma(Y)$, aus welcher diejenige von φ wie im Beweis von (5.5) folgt.

(1) Für $\nu \in P_\sigma(Y)$ ist $\{\rho \in P_\sigma(Y) : \nu \ll \rho\}$ dicht in $P_\sigma(Y)$

($\nu \ll \rho : \Leftrightarrow$ Jede ρ -Nullmenge ist auch eine ν -Nullmenge):

Für $\mu \in P_\sigma(Y)$ und $\alpha = (G, \epsilon) \in A$ gilt

$$\rho := \frac{\epsilon}{2} \nu + (1 - \frac{\epsilon}{2}) \mu \in A(\alpha, \mu) \quad \text{und} \quad \nu \ll \rho.$$

(2) Für $\nu \ll \rho$ und $\rho \in \tilde{\varphi}(P_\sigma(X))$ gilt auch $\nu \in \tilde{\varphi}(P_\sigma(X))$:

Hat ν die Radon-Nikodym-Dichte f bzgl. ρ und gilt $\rho = \tilde{\varphi}(\mu)$, so ergibt sich $\nu = \tilde{\varphi}((f \circ \varphi)\mu)$.

(3) Da $\tilde{\varphi}(P_\sigma(X))$ offen und nicht leer ist, folgt mit

(1) und (2) sofort $\tilde{\varphi}(P_\sigma(X)) = P_\sigma(Y)$.

Betrachtet man sich die Sätze (5.5) und (5.6), so bleiben für Hausdorffräume X und Y sowie eine Borel-meßbare und offene Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ drei Fragen:

- I. Impliziert die Surjektivität von $\tilde{\varphi}$ die Offenheit von $\tilde{\varphi}$?
- II. Impliziert die Offenheit von $\tilde{\varphi}$ die lokale Surjektivität von $\tilde{\varphi}$?
- III. Sind Surjektivität und lokale Surjektivität von $\tilde{\varphi}$ äquivalent?

Die negative Beantwortung dieser Fragen (sogar für stetige φ) ergibt sich aus den folgenden Beispielen.

(5.8) Beispiel

Es gibt einen Hausdorffraum X , einen polnischen Raum Y und eine surjektive, stetige und offene Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$, für welche $\tilde{\varphi}$ nicht surjektiv ist.

Beweis:

Mein Raum X fällt wegen der gewünschten Hausdorff-eigen-schaft etwas kompliziert aus: Setze $X := \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Eine Menge $G \subset X$ heißt genau dann offen, wenn

$$\forall (y, n) \in G \quad \exists y \in U \in \mathcal{G}(\mathbb{R}) \quad \forall z \in U \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (z, n+mk) \in G$$

gilt.

(1) Dies ist eine Topologie:

Die Vereinigungsstabilität ist klar. Seien G_1 und G_2 offen und $(y, n) \in G_1 \cap G_2$. Seien $U_1 \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ mit der obigen Eigenschaft zu G_1 gewählt. Für ein $z \in U := U_1 \cap U_2$ gibt es dann k_1 wie oben verlangt. Für $k := k_1 k_2$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt dann $(z, n+mk) \in G_1 \cap G_2$.

(2) X ist ein Hausdorffraum:

Seien (y_1, n_1) und (y_2, n_2) aus X .

Ist $y_1 \neq y_2$ so gibt es $U_1 \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ mit $y_1 \in U_1$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Für $G_1 := U_1 \times \mathbb{N}$ gilt dann $(y_1, n_1) \in G_1$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und $G_1 \in \mathcal{G}(X)$.

Gilt $y = y_1 = y_2$ und $n_1 < n_2$ (O.E), so setze für $k := n_2 - n_1 + 1$: $G_1 := \mathbb{R} \times \{n_1 + mk : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Offen-sichtlich gilt dann $(y, n_1) \in G_1$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und $G_1 \in \mathcal{G}(X)$ stets.

(3) $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}(X)$:

Sei $P \in \mathcal{P}(X)$. Die Mengen $P_n := P \cup \mathbb{R} \times \{m \in \mathbb{N} : m > n\}$

sind dann offen in X (wähle $U = \mathbb{R}$ und $k = n$), und es gilt $P = \bigcap \{ P_n : n \in \mathbb{N} \} \in \mathcal{B}(X)$.

(4) Sei $Y = \mathbb{R}$ (euklidisch) und φ die Projektion von X auf die erste Koordinate. φ ist offensichtlich surjektiv, stetig ($\varphi^{-1}(U) = U \times \mathbb{N}$) und offen (für obiges U zu $(y, n) \in G$ gilt $U \subset \varphi(G)$).

(5) Annahme: $\tilde{\varphi}$ ist surjektiv. Dann gibt es ein $\mu \in M_0(X)$ mit $\tilde{\varphi}(\mu) = \lambda$ (λ : das auf $[0, 1]$ eingeschränkte Lebesgue-Maß). Für alle $x \in X$ folgt sofort $\mu(\{x\}) \leq \lambda(\{\varphi(x)\}) = 0$, so daß wegen $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}(X)$ mit dem Resultat von BANACH/KURATOWSKI $\mu = 0$ folgt, was den gewünschten Widerspruch liefert. Q.e.d.

Es sei nochmals erwähnt, daß dieses Ergebnis von Banach und Kuratowski die Kontinuumshypothese voraussetzt.

(5.9) Beispiel

Es gibt einen Hausdorffraum X_0 , einen polnischen Raum Y und eine surjektive, stetige und offene Abbildung $\varphi_0 : X_0 \rightarrow Y$, für welche $\tilde{\varphi}_0$ zwar surjektiv, aber weder offen noch lokal surjektiv ist.

Beweis:

Seien X, Y und φ wie im Beweis von (5.8). Setze $X_0 := X \cup Y$ mit der finalen Topologie bzgl. der Einbettungen, d.h. ein $G \subset X_0$ ist genau dann offen, wenn $G \cap X$ offen in X und $G \cap Y$ offen in Y ist. Wähle $\varphi_0 : X_0 \rightarrow Y$ durch

$\varphi_0|_X = \varphi$ und $\varphi_0|_Y = \text{id}_Y$. Mit φ ist offensichtlich auch φ_0 surjektiv, stetig und offen. Da jedes Borel-Maß auf Y trivial zu einem solchen auf X_0 fortgesetzt werden kann, ist $\tilde{\varphi}_0$ surjektiv.

Da X offen in X_0 ist und

$$\lambda \notin \tilde{\varphi}(\{\mu : \mu(\bar{X}) = 0\})$$

wie oben gilt, ist $\tilde{\varphi}_0$ nicht lokal surjektiv.

$\tilde{\varphi}_0$ ist nicht offen: Setze $\mu_n := n\chi_{[0, 1/n]}^\lambda$. In $M_\sigma(Y)$ konvergiert die Folge $\mu_n, n \in \mathbb{N}$ gegen ϵ_0 . Für

$$\Gamma := \{\nu \in M_\sigma(X_0) : \nu(Y) < 1/2\}$$

gilt dann $\epsilon_0 = \tilde{\varphi}_0(\epsilon_{(0,1)}) \in \tilde{\varphi}_0(\Gamma)$, obwohl kein μ_n in $\tilde{\varphi}_0(\Gamma)$ liegt:

Gäbe es $\nu \in \Gamma$ mit $\tilde{\varphi}_0(\nu) = \mu_n$, so würde für alle $x \in X$ gelten $\nu(\{x\}) = 0$, also mit dem Resultat von BANACH/KURATOWSKI $\nu(X) = 0$ und somit $\nu(X_0) < 1/2$ im Widerspruch zu $\mu_n(Y) = 1$. Q.e.d.

Das obige Beispiel (5.9) zeigt im Übrigen, daß die Voraussetzung " φ offen, stetig und surjektiv" auch für die Offenheit von $\tilde{\varphi}$ aufs Bild nicht hinreichend ist.

(5.10) Beispiel

Es gibt lokalkompakte Räume X und Y sowie eine surjektive stetige und offene Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ für welche $\tilde{\varphi}$ zwar offen, aber nicht lokal surjektiv ist.

Beweis:

Sei w_1 die erste überabzählbare Ordinalzahl. Für $0 < z \leq w_1$ sei $\tilde{X}_z := [0, z[$ versehen mit der Ordnungstopologie und $X_z := \tilde{X}_z \times \{z\}$. Sei $X := \bigcup \{X_z : z \leq w_1\}$ versehen mit der finalen Topologie bzgl. der Einbettungen, d.h. $G \subset X$ ist genau dann offen, wenn stets $G \cap X_z \in \mathcal{G}(X_z)$ gilt. Sei $Y := \tilde{X}_{w_1}$ mit der Ordnungstopologie und $Z := [0, w_1]$ mit $\mathcal{P}(Z) = \mathcal{G}(Z)$. Sei $\varphi : X \rightarrow Y$ die Projektion auf die erste und $\psi : X \rightarrow Z$ die Projektion auf die zweite Koordinate. Dann gilt:

(1) X und Y sind lokalkompakt:

Sei $(x, z) \in X$. Dann ist die Menge $[0, x] \times \{z\} = [0, x+1[\times \{z\}$ kompakt und offen in X . Y analog.

(2) φ ist stetig, offen und surjektiv: Die Surjektivität ist klar.

Für $y_1 \in Y$ gilt $\varphi^{-1}(]y_1, y_2[) = \bigcup \{([y_1, y_2[\cap \tilde{X}_z) \times \{z\} : z \leq w_1\}$, also ist φ stetig.

Für $G \in \mathcal{G}(X)$ gilt $\varphi(G) = \bigcup \{\varphi(G \cap X_z) : z \leq w_1\}$, also ist φ offen.

(3) ψ ist stetig: Für $U \in \mathcal{P}(Z)$ gilt $\psi^{-1}(U) = \bigcup \{X_z : z \in U\}$.

(4) $\tilde{\varphi}$ ist nicht lokal surjektiv: Wähle

$$G := \bigcup \{X_z : z < w_1\} \in \mathcal{G}(X),$$

und es gilt $\varphi(G) = Y$. Wäre $\tilde{\varphi}$ lokal surjektiv, so gäbe es zum Dieudonné-Maß $\nu \in M_0(Y)$ ein $\mu \in M_0(X)$ mit $\nu = \tilde{\varphi}(\mu)$ und $\mu(\bar{G}) = 0$. Sei $\rho := \tilde{\psi}(\mu)$. Es folgt sofort

$$\rho(\{w_1\}) = \mu(X_{w_1}) = 0.$$

Für $z \in Z$ mit $z < w_1$ gilt

$$\rho(\{z\}) = \mu(X_z) = \sum_{x \in X_z} \mu(\{x, z\}) \leq \sum_{x \in X_z} v(\{x\}) = 0.$$

Mit dem Resultat von BANACH/KURATOWSKI folgt $\rho = 0$ im Widerspruch zu $v \neq 0$.

(5) $\tilde{\varphi}$ ist offen:

Zu $\alpha = (\mathcal{G}, \varepsilon) \in A$ sei $N_\alpha \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon \in]\frac{1}{N_\alpha+1}, \frac{1}{N_\alpha}]$ definiert.

Für $\mu \in M_\sigma(X)$, $v := \tilde{\varphi}(\mu)$ und $v_\alpha \in A(n_\alpha^{-N_\alpha} \alpha, v)$ ist wiederum die Existenz von Maßen $\mu_\alpha \in M_\sigma(X)$ mit $v_\alpha = \tilde{\varphi}(\mu_\alpha)$ und $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ zu zeigen.

(I) Wegen des Resultats von BANACH/KURATOWSKI gibt es eine abzählbare Teilmenge $Z_0 = \{w_1 = z_1, z_2, \dots\}$ von Z mit $\tilde{\varphi}(\mu)(Z_0) = \tilde{\varphi}(\mu)(Z)$. Es folgt sofort

$$\mu = \sum_{z \in Z_0} \mu^z \quad \text{und} \quad v = \sum_{z \in Z_0} v^z$$

für $\mu^z = \chi_{X_z} \mu$ und $v^z = \tilde{\varphi}(\mu^z)$ falls $z \in Z_0$.

(II) Es gibt $v_\alpha^z \in M_\sigma(Y)$ mit

$$v_\alpha = \sum_{z \in Z_0} v_\alpha^z \quad \text{und} \quad v_\alpha^z \rightarrow v^z \quad \text{stets ;}$$

denn:

Wegen der Aussage (+) im Beweis von (1.5) gibt es zu $\alpha = (\mathcal{G}, \varepsilon) \in A$ Maße $v_\alpha^{z_1} \in A(\alpha, v_\alpha^{z_1})$, $1 \leq N_\alpha$ und

ein Maß $v_\alpha^{z_{N_\alpha+1}}$ mit

$$v_\alpha = v_\alpha^{z_1} + \dots + v_\alpha^{z_{N_\alpha+1}}$$

Setze jetzt noch $v_\alpha^{z_1} = 0$ für $1 > N_\alpha + 1$.

(III) In (II) kann ohne Einschränkung

$$v_\alpha^z(\widetilde{X}_z) = 0 \quad \text{für } \alpha \in A \text{ und } z \in Z_0$$

angenommen werden. Ansonsten setze man

$$\widetilde{v}_\alpha^z := \chi_{\widetilde{X}_z} v_\alpha^z \quad \text{für } z < w_1$$

$$\widetilde{v}_\alpha^{w_1} := v_\alpha - \sum_{w_1 + z \in Z_0} \widetilde{v}_\alpha^z.$$

Es folgt

$$\limsup \widetilde{v}_\alpha^z(Y) \leq \limsup v_\alpha^z(Y) \leq v^z(Y) \quad \text{für } z < w_1,$$

$$\begin{aligned} \liminf \widetilde{v}_\alpha^z(G) &= \liminf v_\alpha^z(G \cap \widetilde{X}_z) \\ &\geq v^z(G \cap \widetilde{X}_z) = v^z(G) \quad \text{für } G \in \mathcal{G}(Y), z < w_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \limsup \widetilde{v}_\alpha^{w_1}(Y) &= \limsup (v_\alpha(Y) - \sum_{i \geq 2} \widetilde{v}_\alpha^{z_i}(Y)) \\ &= v(Y) - \liminf \sum_{i \geq 2} \widetilde{v}_\alpha^{z_i}(Y) \\ &\leq \inf \{ v(Y) - \liminf \sum_{i=2}^N \widetilde{v}_\alpha^{z_i}(Y) : N \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \inf \left\{ v(Y) - \sum_{i=2}^N v^{z_i}(Y) : N \in \mathbb{N} \right\} \\
 &= v^{w_1}(Y) ,
 \end{aligned}$$

$$\liminf \tilde{v}_\alpha^{w_1}(G) \geq \liminf v_\alpha^{w_1}(G) \geq v^{w_1}(G) \quad \text{für } G \in \mathcal{G}(Y) .$$

(IV) Da die Restriktion

$$\varphi|_{X_Z} : X_Z \rightarrow \tilde{X}_Z$$

ein Homöomorphismus ist, gibt es Maße $\mu_\alpha^z \in M_\sigma(X)$ mit $\tilde{\varphi}(\mu_\alpha^z) = v_\alpha^z$ und $\mu_\alpha^z \rightarrow \mu^z$ für $z \in Z_0$. Setzt man nun

$$\mu_\alpha := \sum_{z \in Z_0} \mu_\alpha^z ,$$

so folgt sofort $\tilde{\varphi}(\mu_\alpha) = v_\alpha$ und $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ wegen

$$\limsup \mu_\alpha(X) = \limsup v_\alpha(Y) = v(Y) = \mu(X) \quad \text{und}$$

$$\liminf \mu_\alpha(G) = \liminf \sum_{z \in Z_0} \mu_\alpha^z(G)$$

$$\geq \sum_{z \in Z_0} \liminf \mu_\alpha^z(G)$$

$$\geq \sum_{z \in Z_0} \mu^z(G) = \mu(G) \quad \text{für } G \in \mathcal{G}(X) .$$

Q.e.d.

6. Kapitel: DIE MARGINALMAßABBILDUNGEN FÜR PRODUKTRÄUME

Ist Y der Produktraum der topologischen Räume X_1 und X_2 mit den Projektionen π_1 und π_2 , so beantwortet das fünfte Kapitel die Frage nach der Offenheit der Marginalmaßabbildungen $\tilde{\pi}_1$. Eine natürliche Verallgemeinerung ist die Frage nach der Offenheit der gemeinsamen Abbildung $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)$. EIFLER (3) beantwortet sie für straffe Wahrscheinlichkeitsmaße auf kompakten Räumen positiv. Hier wird die Offenheit der gemeinsamen Marginalmaßabbildungen mit neuen Beweismethoden, welche wesentlich die Offenheit der Addition benützen, für beliebige topologische Räume gezeigt werden. Anschließend werden für einen dreidimensionalen Raum Y verschiedene Abbildungen auf zweidimensionale Marginalmaße betrachtet.

(6.1) Definition

Für topologische Räume X_1 und X_2 sei Y der Produktraum und π_1, π_2 die Projektionen. Weiterhin sei

$$N := \{ (\mu, \nu) \in M_T(X_1) \times M_T(X_2) : \mu(X_1) = \nu(X_2) \}$$

und

$$\Lambda : M_T(Y) \ni \mu \mapsto (\tilde{\pi}_1(\mu), \tilde{\pi}_2(\mu)) \in N$$

definiert.

Die Stetigkeit von Λ ist offensichtlich.

Der nun folgende Beweis der Offenheit von Λ verwendet (und zeigt), daß für beliebiges $\Gamma \in \mathcal{W}(Y)$ sich das Bild $\Lambda(\Gamma)$ nicht von der Gesamtheit der Bilder aller derjenigen $\mu \in \Gamma$, welche sich als endliche Summe von Produktmaßen darstellen lassen, unterscheidet. Auf dieser Teilmenge von $M_\tau(Y)$ wiederum ist Λ im wesentlichen nichts anderes als die Addition der Faktoren der jeweiligen Produktmaße und demnach offen.

(6.2) Satz

Die Abbildung Λ ist stets offen.

Beweis:

Ist $\mu \in M_\tau(X_1)$ und $\nu \in M_\tau(X_2)$, so wird mit $\mu \hat{\otimes} \nu$ die eindeutig bestimmte τ -stetige Fortsetzung des Produktmaßes $\mu \otimes \nu|_{\mathcal{B}(X_1) \times \mathcal{B}(X_2)}$ auf $\mathcal{B}(Y)$ bezeichnet (vgl. RESSEL).

Setzt man nun $Z_k := N^k$ und $Z = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$ mit der Summenraumtopologie und definiert

$$\Phi : Z \ni (\mu_i, \nu_i)_{1 \leq i \leq k} \rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{1}{\mu_1(X_1)} \mu_i \hat{\otimes} \nu_i \in M_\tau(Y) \\ \mu_1(X_1) > 0$$

$$\Psi : Z \ni (\mu_i, \nu_i)_{1 \leq i \leq k} \rightarrow \left(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \nu_i \right) \in N,$$

so folgt die Behauptung sofort mit den folgenden drei Aussagen

- (1) ϕ ist stetig,
- (2) ψ ist offen,
- (3) $\Lambda(\Gamma) = \psi(\phi^{-1}(\Gamma))$ für $\Gamma \in \mathcal{W}(Y)$.

Zu (1):

Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Stetigkeit von $\phi|_{Z_k}$ zu zeigen.
 Wegen (1.2) ist hierfür die Stetigkeit von $\phi|_{Z_1}$ hinreichend.
 Diese ergibt sich aus der Stetigkeit der Abbildungen

$$M_T(Y) \ni \rho \mapsto \begin{cases} \rho(Y)^{-1/2} \rho & \text{falls } \rho \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \rho = 0 \end{cases}$$

und

$$M_T(X_1) \times M_T(X_2) \ni (\mu, \nu) \mapsto \mu \hat{\otimes} \nu \in M_T(Y)$$

(vgl. RESSEL, Theorem 1).

Zu (2):

Die Offenheit von $\psi|_{Z_k}$ ist für $k \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

Für $(\mu_1, \nu_1)_{1 \leq i \leq k} \in N^k$, $(\mu, \nu) = \psi((\mu_1, \nu_1)_{1 \leq i \leq k})$ und $\alpha \in A$ wird

$$(A(k^{-1}n_{\alpha}^{-k}\alpha, \mu) \times A(k^{-1}n_{\alpha}^{-k}\alpha, \nu)) \cap N \subset \psi((\prod_{i=1}^k (A(\alpha, \mu_1) \times A(\alpha, \nu_1))) \cap Z_k)$$

gezeigt.

Sei also $\rho \in A(k^{-1}n_{\alpha}^{-k}\alpha, \mu)$ und $\sigma \in (k^{-1}n_{\alpha}^{-k}\alpha, \nu)$ mit $\rho(X_1) = \sigma(X_2)$.

Mit dem Beweis von (1.5) gibt es $\rho_1 \in A(k^{-1}\alpha, \mu_1)$ und $\sigma_1 \in A(k^{-1}\alpha, \nu_1)$ mit

$$\sum_{i=1}^k \rho_i = \rho \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^k \sigma_i = \sigma \quad (+) .$$

Da für $i \in \{1 \dots k\}$

$$\rho_i(X_1), \sigma_i(X_2) \in] \mu_i(X_1) - \frac{\varepsilon}{k}, \mu_i(X_1) + \frac{\varepsilon}{k} [$$

gilt, können die ρ_i, σ_i so abgeändert werden, daß immer noch (+) gilt und zusätzlich

$$\rho_i \in A(\alpha, \mu_i), \sigma_i \in A(\alpha, \nu_i) \quad \text{sowie} \quad \rho_i(X_1) = \sigma_i(X_2) \quad \text{stets.}$$

Zu (3):

" $\supset$ " : Folgt sofort aus $\Lambda \circ \Phi = \Psi$.

" $\subset$ " : Für $\rho \in \Gamma$ ist also ein $z \in Z$ mit $\Lambda(\rho) = \Psi(z)$ und $\Phi(z) \in \Gamma$ gesucht. Anders ausgedrückt ist also für $\rho \in \Gamma$ eine endliche Summe von Produktmaßen gesucht, die immer noch in Γ liegt und die gleichen Marginalmaße besitzt.

Sei demnach

$$\rho \in \Gamma = \{ \tilde{\rho} : \tilde{\rho}(G_\ell) > \gamma_\ell \quad \text{für} \quad \ell = 1 \dots n \quad \text{und} \quad \tilde{\rho}(Y) < \delta \}$$

für $G_\ell \in \mathcal{G}(Y)$ und $\gamma_\ell, \delta \geq 0$. Setze noch $\tilde{\pi}_1(\rho) = \mu$ und $\tilde{\pi}_2(\rho) = \nu$. Aufgrund der τ -Stetigkeit von ρ kann ohne Einschränkung

$$G_\ell = \bigcup_{j \in I_\ell} U_j^\ell \times V_j^\ell$$

für endliche Indexmengen I_ℓ und $U_j^\ell \in \mathcal{G}(X_1)$, $V_j^\ell \in \mathcal{G}(X_2)$ angenommen werden. Sind $B_1 \dots B_m$ die

Atome der von $\{U_j^\ell : \ell \leq n, j \in I_\ell\}$ erzeugten Sigmaalgebra in X_1 und $C_1 \dots C_r$ die Atome der von $\{V_j^\ell : \ell \leq n, j \in I_\ell\}$ erzeugten Sigmaalgebra in X_2 , so ist damit Y in Rechtecke $B_s \times C_t$ eingeteilt, die entweder in einem G_ℓ liegen oder aber einen leeren Schnitt mit diesem haben. Für

$$(s,t) \in I' := \{(s,t) : s \leq m, t \leq r, \rho(B_s \times C_t) > 0\}$$

setzt man deswegen

$$\mu_{st} := \frac{\rho(B_s \times C_t)}{\mu(B_s)} \chi_{B_s} \mu,$$

$$\nu_{st} := \frac{\rho(B_s \times C_t)}{\nu(C_t)} \chi_{C_t} \nu,$$

und es folgt

$$\Psi((\mu_{st}, \nu_{st})_{(s,t) \in I'}) = \left(\sum_{(s,t) \in I'} \frac{\rho(B_s \times C_t)}{\mu(B_s)} \chi_{B_s} \mu, \right.$$

$$\left. \sum_{(s,t) \in I'} \frac{\rho(B_s \times C_t)}{\nu(C_t)} \chi_{C_t} \nu \right) = \left(\sum_{s=1}^m \chi_{B_s} \mu, \sum_{t=1}^r \chi_{C_t} \nu \right) = (\mu, \nu),$$

$$\Phi((\mu_{st}, \nu_{st})_{(s,t) \in I'})(G_\ell) = \sum_{\substack{(s,t) \in I' \\ B_s \times C_t \subset G_\ell}} \frac{1}{\mu_{st}(X_1)} (\mu_{st} \tilde{\otimes} \nu_{st})(Y)$$

$$= \sum_{\substack{(s,t) \in I' \\ B_s \times C_t \subset G_\ell}} \rho(B_s \times C_t) = \rho(G_\ell).$$

Q.e.d.

(6.3) Bemerkung

- (1) Die Aussage von Satz (6.2) gilt analog für beliebige endliche Produkte von topologischen Räumen.
- (2) Wegen der fraglichen Existenz von Produktmaßen auf $\mathcal{B}(Y)$ für nicht τ -stetige Marginalmaße, scheint die Beschränkung auf $M_\tau(Y)$ gerechtfertigt.

Der zweite Teil dieses Kapitels ist den Abbildungen gewidmet, die Maßen $\mu \in M_\tau(X_1 \times X_2 \times X_3)$ zweidimensionaler Marginalmaße zuordnen.

(6.4) Definition

Für Hausdorffräume X_1, X_2, X_3 , die jeweils mindestens zwei Punkte besitzen, und für $Y = X_1 \times X_2 \times X_3$ werde definiert:

$\pi_{kl} : Y \rightarrow X_k \times X_l$ ist die Projektion für $k \neq l$

$\pi_k : Y \rightarrow X_k$ ist die Projektion ,

$\Lambda_1 : M_\tau(Y) \ni \rho \rightarrow (\tilde{\pi}_{12}(\rho), \tilde{\pi}_{23}(\rho)) \in N_1$,

$\Lambda_2 : M_\tau(Y) \ni \rho \rightarrow (\tilde{\pi}_{12}(\rho), \tilde{\pi}_{23}(\rho), \tilde{\pi}_{13}(\rho)) \in N_2$,

für $N_1 := \Lambda_1(M_\tau(Y))$ mit der Unterraumtopologie in

$M_\tau(X_1 \times X_2) \times M_\tau(X_2 \times X_3)$ bzw. $M_\tau(X_1 \times X_2) \times M_\tau(X_2 \times X_3) \times M_\tau(X_1 \times X_3)$.

Anders als die Abbildung Λ auf die eindimensionalen Marginalmaße, sind die Abbildungen Λ_1 und Λ_2 nur in einem speziellen Fall offen. Es gilt nämlich

(6.5) Satz

Unter den Voraussetzungen von Definition (6.4) gilt

- (a) Λ_1 ist genau dann offen, wenn X_2 ein diskreter Raum ist.
- (b) Ist Λ_2 offen, so sind alle Räume X_1 diskret.
- (c) Sind alle Räume X_1 endlich und diskret, so ist Λ_2 offen.

Beweis:

Die Bedingungen an die Räume sind notwendig:

Sei X_2 ein Hausdorff-Raum, indem für ein $x \in X_2$ die Menge $\{x\}$ nicht offen ist. Dann gibt es in X_2 gegen x konvergente Netze x_β und y_β mit $x \neq x_\beta \neq y_\beta \neq x$ stets.

Ohne Einschränkung sei ein weiterer Punkt $0 \in X_2$ mit $0 \neq x$, $0 \neq x_\beta$, $0 \neq y_\beta$ stets, sowie Punkte $0, 1 \in X_1$ und $0, 1 \in X_3$ gegeben.

Zu (a):

Für die im folgenden definierten μ^+ , $\mu^- \in M_T(Y)$, $(\mu_{12}^\beta, \mu_{23}^\beta) \in N_1$ gilt: $(\mu_{12}^\beta, \mu_{23}^\beta)$ konvergiert gegen $\Lambda_1(\mu^+) = \Lambda_1(\mu^-)$ und die eindeutig bestimmten Urbilder bzgl. Λ_1 von $(\mu_{12}^\beta, \mu_{23}^\beta)$ konvergieren gegen μ^- , Λ_1 ist also nicht offen:

$$\mu^+ := \epsilon_{(0,x,1)} + \epsilon_{(1,x,0)},$$

$$\mu^- := \epsilon_{(1,x,1)} + \epsilon_{(0,x,0)},$$

$$(\mu_{12}^\beta, \mu_{23}^\beta) := (\epsilon_{(0,x_\beta)} + \epsilon_{(1,y_\beta)}, \epsilon_{(x_\beta,0)} + \epsilon_{(y_\beta,1)}).$$

Zu (b):

Die analoge Argumentation gilt im Fall (b) für

$$\mu^+ := \varepsilon(0,0,1) + \varepsilon(1,x,1) + \varepsilon(0,x,0) + \varepsilon(1,0,0)$$

$$\mu^- := \varepsilon(0,0,0) + \varepsilon(1,x,0) + \varepsilon(0,x,1) + \varepsilon(1,0,1)$$

und

$$(\mu_{12}^\beta, \mu_{23}^\beta, \mu_{13}^\beta) := (\varepsilon(0,0) + \varepsilon(1,0) + \varepsilon(0,x_\beta) + \varepsilon(1,y_\beta) \quad ,$$

$$\varepsilon(0,0) + \varepsilon(0,1) + \varepsilon(x_\beta,1) + \varepsilon(y_\beta,0) \quad ,$$

$$\varepsilon(0,0) + \varepsilon(1,1) + \varepsilon(0,1) + \varepsilon(1,0) \quad) .$$

Die Bedingung an die Räume ist hinreichend:

(a) Da X_2 diskret ist, zerfällt X_2 in clope "Schichten" $X_1 \times \{x_2\} \times X_3$. Ein τ -stetiges Maß auf Y belegt höchstens abzählbar viele dieser Schichten mit nicht verschwindender Masse. Die folgenden Abbildungen sind also Homöomorphismen

$$\varphi_1 : M_\tau(Y) \ni \mu \mapsto (\mu(Y) , (\pi_{13}(X_{X_1 \times \{x_2\} \times X_3} \mu)_{x_2 \in X_2}) \in \mathbb{Z}_1$$

$$\varphi_2 : N_1 \ni (\mu_{12}, \mu_{23}) \mapsto (\mu_{12}(X_1 \times X_2) , (\pi_1(X_{X_1 \times \{x_2\}} \mu_{12}) \quad ,$$

$$\pi_3(X_{\{x_2\} \times X_3} \mu_{23}))_{x_2 \in X_2} \in \mathbb{Z}_2$$

für $Z_1 := \{(c, (\mu_{x_2})_{x_2 \in X_2}) : \sum_{x_2} \mu_{x_2}(X_1 \times X_3) = c\} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \prod_{x_2} M_T(X_1 \times X_3)$

und $Z_2 := \{(c, (\mu_{x_2}, \nu_{x_2})_{x_2 \in X_2}) : \sum_{x_2} \mu_{x_2}(X_1) = \sum_{x_2} \nu_{x_2}(X_3) = c\}$ und

$$\{(\mu_{x_2}(X_1) = \nu_{x_2}(X_3) \text{ stets}) \subset \mathbb{R}_0^+ \times \prod_{x_2} (M_T(X_1) \times M_T(X_3))$$

Wegen Satz (6.2) ist die Abbildung

$$\tilde{\Lambda}_1 : Z_1 \ni (c, (\mu_{x_2})_{x_2 \in X_2}) \rightarrow (c, \Lambda(\mu_{x_2})_{x_2 \in X_2}) \in Z_2$$

offen. Mit $\Lambda_1 = \varphi_2^{-1} \circ \tilde{\Lambda}_1 \circ \varphi_1$ ist damit alles gezeigt.

(Auf jeder Schicht ist Λ_1 nur die Abbildung auf die eindimensionalen Marginalmaße.)

(c) (1) Sind alle X_1 diskret, so ist dies auch Y . Mit Y ist dann auch $M_T(Y)$ metrisierbar. Für $\mu \in M_T(Y)$ und eine Folge $(\mu_{12}^n, \mu_{23}^n, \mu_{13}^n) \in N_2$, die gegen $\Lambda_2(\mu)$ konvergiert, ist also die Existenz von Maßen $\mu^n \in M_T(Y)$ mit $\mu^n \rightarrow \mu$ zu zeigen, für die zusätzlich $\Lambda_2(\mu^n) = (\mu_{12}^n, \mu_{23}^n, \mu_{13}^n)$ gilt.

Ohne Einschränkung können alle Maße als Wahrscheinlichkeitsmaße angenommen werden. Gezeigt wird nun die Existenz einer stetigen Abbildung

$$\bar{\Lambda}_2 : P_2 \rightarrow P_T(Y)$$

mit

$$\bar{\Lambda}_2(\Lambda_2(\mu)) = \mu \quad \text{und} \quad \Lambda_2 \circ \bar{\Lambda}_2 = \text{id}_{P_2}$$

(dabei $P_2 := N_2 \cap (P_\tau(X_1 \times X_2) \times P_\tau(X_2 \times X_3) \times P_\tau(X_1 \times X_3))$).

Setzt man dann $\mu^n := \bar{\lambda}_2((\mu_{12}^n, \mu_{23}^n, \mu_{13}^n))$, so ist alles bewiesen.

- (2) Zu $(\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}) \in P_2$ ist also ein Maß $\nu \in P_\tau(Y)$ mit diesen Marginalmaßen gesucht. Gefragt ist somit nach einem linearen und isotonen Funktional auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum V aller beschränkten, reellen Funktionen auf Y , welches auf dem Unterraum

$$U := \{f_{12} \circ \pi_{12} + f_{23} \circ \pi_{23} + f_{13} \circ \pi_{13} : f_{kl} \in \mathcal{C}^b(X_k \times X_l)\}$$

schon festgelegt ist.

Sei W ein Unterraum von V mit $U \oplus W = V$ und $f_1 \dots f_n$ eine Basis von W . Setze $U_0 := U$ und $U_k := U_{k-1} + \mathbb{R} f_k$ für $k \leq n$. Für $k = 0, \dots, n$ sei $\tilde{U}_k$ der Raum der linearen, isotonen Funktionalen auf U_k , versehen mit der Initialtopologie, die durch die Abbildungen

$$\tilde{U}_k \ni \xi \rightarrow \xi(f) \in \mathbb{R}, \quad f \in U_k$$

erzeugt wird. U_n wird mit $M_\tau(Y)$ identifiziert. Die Abbildung $\bar{\lambda}_2$ wird nun als Komposition von Abbildungen φ_k konstruiert:

$$\bar{\lambda}_2 : P_2 \xrightarrow{\varphi_0} \tilde{U}_0 \xrightarrow{\varphi_1} \tilde{U}_1 \dots \xrightarrow{\varphi_n} \tilde{U}_n.$$

(3) φ_0 wird durch

$$\varphi_0((v_{12}, v_{23}, v_{13})) (f_{12} \circ \pi_{12} + f_{23} \circ \pi_{23} + f_{13} \circ \pi_{13}) := \\ v_{12}(f_{12}) + v_{23}(f_{23}) + v_{13}(f_{13})$$

definiert und ist damit stetig.

(4) Sei nun $1 \leq k \leq n$. Für $\xi \in \tilde{U}_{k-1}$ wird

$$M_\xi := \inf \{ \xi(f) : U_{k-1} \ni f \geq f_k \}$$

und

$$m_\xi := \sup \{ \xi(f) : U_{k-1} \ni f \leq f_k \}$$

gesetzt.

Die Abbildung

$$\xi_0 : U_{k-1} \ni f \rightarrow \mu(f) \in \mathbb{R}$$

ist offensichtlich in $\tilde{U}_{k-1}$. Es gibt ein $\lambda \in [0, 1]$ mit

$$\mu(f_k) = \lambda m_{\xi_0} + (1-\lambda) M_{\xi_0}.$$

Durch

$$\varphi_k(\xi) |_{U_{k-1}} := \xi$$

und

$$\varphi_k(\xi)(f_k) := \lambda m_\xi + (1-\lambda) M_\xi$$

wird die Abbildung φ_k definiert.

Sie ist stetig, weil die Abbildungen

$$\eta_1 : U_{k-1} \ni \xi \rightarrow m_\xi \in \mathbb{R}$$

$$\eta_2 : U_{k-1} \ni \xi \rightarrow m_\xi \in \mathbb{R}$$

stetig sind:

U_{k-1} kann in kanonischer Weise als konvexer Polyeder in einem $\mathbb{R}^n$ aufgefaßt werden und ist als solcher lokal simplizierbar (ROCKAFELLER, Th. 20.5). Mit ROCKAFELLER, Th. 10.2, ist die konkave c_1 -Funktion η_1 und die konvexe c_g -Funktion η_2 dann stetig.

(5) Für

$$\bar{\Lambda}_2 := \varphi_n \circ \dots \circ \varphi_1 \circ \varphi_0$$

folgt nun $\bar{\Lambda}_2(\Lambda_2(\mu)) = \mu$ aus der Wahl von ξ_0 und $\Lambda_2 \circ \bar{\Lambda}_2 = \text{id}_{P_2}$ aus der Wahl von U . Q.e.d.

(6.6) Bemerkung

(a) Die Aussage (c) des vorigen Satzes gilt völlig analog für beliebige endliche Produkte und beliebige Abbildungen

$$M_T(X_1 \times \dots \times X_n) \ni \mu \rightarrow (\tilde{\pi}_{T_i}(\mu))_{i \leq m},$$

wobei $T_1 \dots T_m$ Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ und

$\pi_{T_i} : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \prod_{\ell \in T_i} X_\ell$ die Projektionen sind.

(b) Wie der Beweis von (6.5)(c) zeigt, kann im Falle beliebiger diskreter Räume X_1 ohne Einschränkung von $|X_1| \leq \aleph_0$ ausgegangen werden. Auch in diesem Falle ist die Offenheit von Λ_2 jedoch noch nicht geklärt.

7. Kapitel: DIE MARGINALMAßABBILDUNG FÜR STOCHASTISCHE PROZESSE MIT STETIGEN PFADEN

Für einen Parameterraum T und einen Zustandsraum X ist ein stochastischer Prozeß mit stetigen Pfaden ein Maß auf dem Raum X^T aller stetiger Abbildungen von T nach X . Als Grundsigmaalgebra auf X^T wird in dieser Arbeit die Borelsigmaalgebra zur Kompakt-Offen-Topologie auf X^T gewählt. Für die Projektionen

$$\pi_t : X^T \ni f \rightarrow f(t) \in X, \quad t \in T$$

wird in diesem Kapitel die Abbildung betrachtet, die jedem $\mu \in M_T(X^T)$ die Abbildung

$$\Lambda(\mu) : T \ni t \rightarrow \tilde{\pi}_t(\mu) \in M_T(X)$$

zuordnet. Gezeigt wird, daß für lokalkompakte Räume T jede Abbildung $\Lambda(\mu)$ wiederum stetig ist. Λ selbst ist also in diesem Fall eine Abbildung von $M_T(X^T)$ in die stetigen Funktionen von T nach $M_T(X)$ mit konstantem Gesamtmaß. EIFLER (1) zeigte die Offenheit dieser Abbildung für polnische X und kompakte, metrisierbare, 0-dimensionale Parameterräume T . Hier wird zunächst bewiesen, daß für vollständig reguläre Räume X und T die Offenheit von Λ durch die Surjektivität dieser Abbildung impliziert wird. Danach wird ein Kriterium für die Surjektivität von Λ im Falle kompakter und metri-

sierbarer Räume X gegeben.

Das nun folgende Lemma ermöglicht die Definition der Marginalmaßabbildung.

(7.1) Lemma

Für topologische Räume X und T , sowie ein Maß $\mu \in M_T(X^T)$ sei

$$\Lambda(\mu) : T \ni t \rightarrow \tilde{\pi}_t(\mu) \in M_T(X) \quad .$$

Ist dann T first countable oder lokalkompakt, so ist $\Lambda(\mu)$ stetig.

Beweis:

(a) Ist T first countable, t_n eine gegen t konvergente Folge in T und $G \in \mathcal{G}(X)$, so gilt mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} \liminf \tilde{\pi}_{t_n}(\mu)(G) &= \liminf \mu(\chi_{\{f \in X^T : f(t_n) \in G\}}) \\ &\geq \mu(\liminf \chi_{\{f \in X^T : f(t_n) \in G\}}) \\ &\geq \mu(\chi_{\{f \in X^T : f(t) \in G\}}) = \tilde{\pi}_t(\mu)(G) \quad . \end{aligned}$$

(b) Für einen lokalkompakten Raum T , für ein Netz $(t_\beta)_{\beta \in B}$, welches in T gegen t konvergiert und für $G \in \mathcal{G}(X)$ ist wiederum

$$\liminf \tilde{\pi}_{t_\beta}(\mu)(G) \geq \tilde{\pi}_t(\mu)(G)$$

zu zeigen.

Sei hierzu $\epsilon > 0$. Da T lokalkompakt ist, steigt das System

$$\{(K, G) : K \in \mathcal{K}(T) \wedge t \in K^0\}$$

offener Mengen in X^T gegen $(\{t\}, G)$ auf. Aufgrund der τ -Stetigkeit von μ gibt es also eine kompakte Menge $K \in \mathcal{K}(T)$ mit $t \in K^0$, für die

$$\mu((K, G)) > \mu(\{t\}, G) - \epsilon$$

gilt. Da t_β schließlich in K^0 liegt, folgt sofort

$$\liminf \tilde{\pi}_{t_\beta}(\mu)(G) = \liminf \mu(\{t_\beta\}, G)$$

$$\geq \liminf \mu((K, G)) > \mu(\{t\}, G) - \epsilon$$

$$= \tilde{\pi}_t(\mu)(G) - \epsilon.$$

Q.e.d.

Folgende Definition ist damit möglich:

(7.2) Definition

Sei X ein topologischer Raum, T first countable oder lokalkompakt. Für

$$\mathcal{C} := \{ \phi \in M_T(X)^T : \phi(\cdot)(X) \text{ ist konstant} \}$$

ist die Abbildung

$$\Lambda : M_T(X^T) \rightarrow \mathcal{C}$$

also wohldefiniert.

Für endliche, diskrete Räume T und beliebige Räume X wurde die Offenheit von Λ schon im Satz (6.2) bewiesen. Entscheidend ging im dortigen Beweis die Offenheit der Addition auf $\mathcal{C}$ und die Surjektivität von Λ ein. Dies wird auch hier der Fall sein. Die nun folgenden Lemmata sind deswegen wesentlich.

(7.3) Lemma

Für vollständig reguläre Räume X und T ist die Abbildung

$$\Sigma : M_T(X)^T \times M_T(X)^T \ni (\Phi, \Psi) \rightarrow \Phi + \Psi \in M_T(Y)^T$$

offen.

(7.4) Lemma

Für vollständig reguläre Räume X und T ist die Abbildung

$$\Sigma : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \ni (\Phi, \Psi) \rightarrow \Phi + \Psi \in \mathcal{C}$$

offen.

Beweis von (7.3):

(1) Für $\rho \in M_T(X)$ ist die Menge

$$\{ (f\rho, (1-f)\rho) : f \in \mathcal{C}(X) , \quad 0 \leq f \leq 1 \}$$

dicht in

$$\{ (\mu, \nu) : \mu + \nu = \rho \} ,$$

denn:

Sei $\mu + \nu = \rho$ und $\mu = g\rho$. Das Maß ρ ist τ -stetig auf einem vollständig regulären Raum X , es gibt also eine Folge $f_n \in \mathcal{C}(X)$, $0 \leq f_n \leq 1$, die in $L_1(\rho)$ gegen g konvergiert. Eine Teilfolge konvergiert gegen g ρ -fast sicher. Sei diese ohne Einschränkung $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst. Dann konvergiert $(f_n \rho, (1-f_n) \rho)$ gegen (μ, ν) .

(2) Für $K_i^\ell \in K(T)$ und $\Gamma_i^\ell \in w(X)$ mit $\ell \in \{1, 2\}$, $i \leq n$,

ist die Offenheit von $\bigcap_{i=1}^n (K_i^1, \Gamma_i^1) + \bigcap_{i=1}^n (K_i^2, \Gamma_i^2)$ zu

zeigen. Ohne Einschränkung kann für $i, j \leq n$ und $\ell \in \{1, 2\}$

$$(+)\left\{\begin{array}{ll}(\alpha) & K_i^1 = K_i^2 = K_i \\(\beta) & K_i \cap K_j \neq \emptyset \Rightarrow K_i \cap K_j = K_s \text{ für ein } s \leq n \\(\gamma) & K_i \subset K_j \Rightarrow \Gamma_i^\ell \subset \Gamma_j^\ell \\(\delta) & \Gamma_i^\ell \text{ konvex}\end{array}\right.$$

angenommen werden. Gezeigt wird

$$(++)\quad \bigcap_{i \leq n} (K_i, \Gamma_i^1) + \bigcap_{i \leq n} (K_i, \Gamma_i^2) = \bigcap_{i \leq n} (K_i, \Gamma_i^1 + \Gamma_i^2),$$

womit wegen (1.5) alles bewiesen ist.

(3) Nur eine Inklusion ist für (++) zu zeigen.

Sei $\Omega \in \bigcap_{i=1}^n (K_i, \Gamma_i^1 + \Gamma_i^2)$ und $K := \bigcup_{i \leq n} K_i \in K(T)$.

Für $t \in K$ und

$$K_{1_0} := \cap \{K_1 : t \in K_1\}$$

gibt es wegen der Vorbemerkung (1) eine stetige Funktion $f_t \in \mathcal{C}(X)$ mit $0 \leq f_t \leq 1$ und $f_t \Omega(t) \in \Gamma_{1_0}^1$ sowie $(1-f_t)\Omega(t) \in \Gamma_{1_0}^2$. Die Abbildungen $s \mapsto f_t \Omega(s)$ und $s \mapsto (1-f_t)\Omega(s)$ sind stetig. Es gibt also eine Umgebung $U_t \in \mathcal{G}(T)$ von t so, daß für alle $s \in U_t$ gilt

$$\begin{aligned} f_t \Omega(s) &\in \cap \{\Gamma_1^1 : K_1 \ni s\} \\ (1-f_t)\Omega(s) &\in \cap \{\Gamma_1^2 : K_1 \ni s\} . \end{aligned}$$

Wegen der Regularität von T gibt es Mengen $V_t \in \mathcal{G}(T)$ mit

$$t \in V_t \subset V_t^a \subset U_t .$$

Weiterhin existieren $t_1 \dots t_m \in T$ mit

$$\bigcup_{j=1}^m V_{t_j} \supset K .$$

Wähle nun stetige Funktionen $\varphi_0 \dots \varphi_m \in \mathcal{C}(T)$ mit $0 \leq \varphi_j \leq 1$ stets sowie $\sum_{j=0}^m \varphi_j = 1$, für die zusätzlich

$$\varphi_0|_K = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_j|_{\overline{U}_{t_j}} = 0 \quad \text{falls} \quad j \geq 1$$

gilt.

(Man beachte dazu DUGUNDJI, p.252, 2.11.)

Mit $f_{t_0} := \frac{1}{2}$,

$$\phi := \sum_{j=0}^m \psi_j f_{t_j} \Omega$$

und

$$\psi := \sum_{j=0}^m \psi_j (1 - f_{t_j}) \Omega$$

gilt dann $\psi + \phi = \Omega$. Für $t \in K_1$ folgt aufgrund der Konvexität der Γ_1^ℓ sofort $\phi(t) \in \Gamma_1^1$ und $\psi(t) \in \Gamma_1^2$.

Q.e.d.

Beweis von (7.4)

Sei

$$\phi_0 \in \bigcap_{i=1}^n (K_1, \Gamma_1^1) \cap \mathcal{C} =: U_1$$

und

$$\psi_0 \in \bigcap_{i=1}^n (K_1, \Gamma_1^2) \cap \mathcal{C} =: U_2.$$

Ohne Einschränkung gelte wiederum (+) und zusätzlich

$$\phi_0(\cdot)(X) = 1 \quad \text{und} \quad \psi_0(\cdot)(X) = a \geq 1.$$

$$\Gamma_1^\ell = \{ \rho : \rho(G_{ik}^\ell) > \gamma_{ik}^\ell \quad \text{und} \quad \rho(Y) \in]c_\ell - \delta, c_\ell + \delta[\}$$

$$\begin{aligned} & \text{für } G_{ik}^\ell \in \mathcal{G}(X), \gamma_{ik}^\ell \geq 0 \quad \text{und} \quad c_1 = 1, \\ & c_2 = a, \quad 1 > \delta > 0. \end{aligned}$$

(+++)

δ ist so klein, daß für $i \leq n$ und $t \in K_1$ stets

$$\phi_0(t)(G_{ik}^1) > \gamma_{ik}^1 + \delta \quad \text{und} \quad \psi_0(t)(G_{ik}^2) > \gamma_{ik}^2 + \delta \quad \text{gilt.}$$

(Man beachte bei der letzten Forderung DUGUNDJI, p.227, 2.4.)

Für $\tilde{\Gamma}_1^\ell \subset \{\rho: \rho(G_{1k}^\ell) > \gamma_{1k}^\ell + \delta \text{ und } \rho(X) \in]c_\ell - \frac{\delta}{4}, c_\ell + \frac{\delta}{4}[\}$,

die zusätzlich (+) erfüllen, wird nun

$$\bigcap_{i=1}^n (K_i, \tilde{\Gamma}_i^1 + \tilde{\Gamma}_i^2) \cap \mathcal{C} \subset U_1 + U_2$$

und damit die Behauptung gezeigt:

Zu $\Omega \in \bigcap_{i=1}^n (K_i, \tilde{\Gamma}_i^1 + \tilde{\Gamma}_i^2) \cap \mathcal{C}$ gibt es wegen (++) Abbildungen

$$\Phi \in \bigcap_{i=1}^n (K_i, \tilde{\Gamma}_i^1) \text{ und } \Psi \in \bigcap_{i=1}^n (K_i, \tilde{\Gamma}_i^2)$$

mit $\Phi + \Psi = \Omega$. Diese sind nun in Abbildungen $\tilde{\Phi}$ und $\tilde{\Psi}$ mit gleicher Summe aber konstanten Gesamtmaßen abzuändern. Werde dazu

$$G := \{t \in T : \Phi(t)(X) > 1 - \frac{\delta}{4}\} \in \mathcal{G}(T)$$

gesetzt.

Da $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ eine Teilmenge von G ist, gibt es

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}(T)$ mit $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ und

$$\varphi_1|_K = 1 \text{ sowie } \varphi_2|_{\bar{G}} = 1.$$

Mit den Definitionen

$$\tilde{\Phi}(t) := \varphi_1(t) \frac{1 - \frac{\delta}{4}}{\Phi(t)(X)} \Phi(t) + \varphi_2(t) \frac{1 - \frac{\delta}{4}}{\Omega(t)(X)} \Omega(t) \leq \Omega(t)$$

und

$$\tilde{\Psi}(t) := \Omega(t) - \tilde{\Phi}(t)$$

folgt unter Beachtung von Satz (3.4) sofort $\tilde{\psi}, \tilde{\phi} \in \mathcal{C}$ und $\tilde{\psi} + \tilde{\phi} = \Omega$. Da für $t \in K$ aber auch

$$(\phi(t) - \tilde{\phi}(t))(X) < \frac{\delta}{2}$$

gilt, folgt auch $\tilde{\psi} \in U_2$ und $\tilde{\phi} \in U_1$, also die Behauptung.

Q.e.d.

Das nun folgende technische Lemma wird sich hier und im abschließenden 8. Kapitel als nützlich erweisen.

(7.5) Lemma

Sei T ein vollständig regulärer topologischer Raum, $K_1, \dots, K_m$ ein System nicht-leerer, paarweise verschiedener, kompakter Mengen in T und $G_1, \dots, G_m$ offene Mengen mit $G_1 \supset K_1$ stets.

Zusätzlich sei $\{K_1, \dots, K_m\} \cup \{\emptyset\}$ durchschnittsstabil. Dann gibt es $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{C}(T)$ mit

$$(i) \quad T_r(h_1) \subset G_1 \quad \text{stets}$$

$$(ii) \quad 0 \leq h_1 \quad \text{stets} \quad , \quad \sum_{i=1}^m h_i \leq 1$$

$$(iii) \quad \text{Für } t \in K := \bigcup \{K_i : i \leq m\} \text{ und } K_0 := \bigcap \{K_i : t \in K_i\} \\ \text{gilt}$$

$$\sum_{\{i: K_i \subset K_0\}} h_i(t) = 1 .$$

(Für $g \in \mathcal{C}(T)$ bezeichne $T_r(g)$ den Träger von g .)

Beweis:

Ohne Einschränkung kann für $i, j \leq m$

$$(+)\quad K_i \subset K_j \Rightarrow i \leq j$$

angenommen werden (Ein K_{j_1} welches kein weiteres K_i enthält, erhält die Nummer 1, ein K_{j_2} , $j_2 > j_1$, welches kein weiteres K_i mit $i > j_1$ enthält die Nummer 2, u.s.w.).

Da T regulär ist, gibt es (DUGUNDJI, p.225, 1.5) offene Mengen U_i mit

$$K_i \subset U_i \subset U_i^a \subset G_i, \quad i \leq m.$$

Von "innen nach außen" (vgl. (+)) werden nun rekursiv

Funktionen $g_0, \dots, g_m \in \mathcal{C}(T)$ definiert:

$$g_0 := 0,$$

$1 \leq i \leq m$: Für

$$\tilde{K}_i := K_i \cap \{t \in T : \sum_{\ell=0}^{i-1} g_\ell(t) \leq \frac{1}{2}\}$$

gibt es (DUGUNDJI, p.252, problem 2.11) ein $g_i \in \mathcal{C}(T)$ mit $0 \leq g_i \leq 1$ und

$$g_i|_{\tilde{K}_i} = 1 \quad \text{und} \quad g_i|_{\bar{U}_i \cup \bigcup \{K_j : K_j \cap \tilde{K}_i = \emptyset\}} = 0.$$

Setzt man für $1 \leq i \leq m$ aus Normierungsgründen noch

$$h_i := (\max \{ \sum_{j=1}^m g_j, \frac{1}{4} \})^{-1} g_i,$$

so folgt:

$$(i) \quad \text{Tr}(h_1) = \text{Tr}(g_1) \subset U_1^a \subset G_1 \quad \text{stets.}$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^m h_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^m g_i(t) \geq \frac{1}{4} \\ 4 \sum_{i=1}^m g_i(t) & \text{falls } \sum_{i=1}^m g_i(t) < \frac{1}{4} \end{cases}$$

(iii) Sei nun $t \in K$ und $K_0 = \cap \{K_i : t \in K_i\}$.

Nach Konstruktion folgt sofort

$$\sum_{i=1}^m g_i(t) > \frac{1}{2} \quad , \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^m h_i(t) = 1$$

Für $i \leq m$ mit $K_i \not\subset K_0$ ist also noch $h_i(t) = 0$ zu zeigen.

1. Fall: $K_i \cap K_0 = \emptyset$.

Es folgt $\tilde{K}_i \cap K_0 = \emptyset$ und somit $g_i|_{K_0} = 0$, also $h_i(t) = 0$.

2. Fall: $K_i \cap K_0 = K_j$ für ein $j < i$ (beachte (+)).

Es folgt

$$K_0 \cap \tilde{K}_i = K_j \cap \left\{ s \in T : \sum_{\ell=0}^{i-1} g_\ell(s) \leq \frac{1}{2} \right\} = \emptyset \quad ,$$

also wiederum $g_i|_{K_0} = 0$ und $h_i(t) = 0$.

Q.e.d.

Wie im Beweis von Satz (5.6) wird nun die Offenheit der Addition im Bildbereich zur Konstruktion offener Mengen in $\mathcal{C}$ benützt.

(7.6) Satz

Sei T first countable oder lokalkompakt und (zusätzlich) vollständig regulär. Sei X ein vollständig regulärer Raum. Ist dann Λ surjektiv, so ist es auch offen.

Beweis:

(1) Λ ist im Punkt 0 aufgrund seiner Surjektivität auch offen. Betrachte also ohne Einschränkung ein $\mu \in P_T(X^T)$ mit

$$\mu \in U := \{ \nu \in M_T(X^T) : \nu(G_1) > \mu(G_1) - \epsilon, \quad 1 \leq m, \quad \nu(X^T) < 1 + \epsilon \}$$

für offene $G_1 \in \mathcal{G}(X^T)$ und $\epsilon > 0$.

Seien $B_1, \dots, B_n$ diejenigen Atome der Sigmaalgebra, die von $\{G_1 : 1 \leq m\}$ in X^T erzeugt wird, für die $\mu(B_j) > 0$ gilt.

Setzt man

$$\mu_j := \frac{1}{\mu(B_j)} \chi_{B_j} \mu$$

und

$$U_j := \{ \nu : \nu(G_1) > \mu_j(G_1) - \epsilon \quad \text{und} \quad \nu(X^T) < 1 + \epsilon \} \quad ,$$

so ist wegen Lemma (7.4) nur noch für $j \leq n$ zu zeigen, daß $\Lambda[U_j]$ eine Umgebung von $\Lambda(\mu_j)$ bildet. Gelte also ohne Einschränkung $\mu = \mu_1$ und $\mu(G_1) = 1$ stets.

(2) Mit der Wahl von

$$G = \bigcap_{i=1}^m G_i$$

sieht man sofort ein, daß ohne Einschränkung $m = 1$ angenommen werden kann.

(3) Sei also

$$\mu \in U := \{ \nu : \nu \left(\bigcap_{i=1}^n (K_i, U_i) \right) > 1 - \varepsilon \wedge \nu(X^T) < 1 + \varepsilon \}$$

$$\text{mit } \mu \left(\bigcap_{i=1}^n (K_i, U_i) \right) = 1 \quad \text{für } K_i \in K(T) \quad , \quad U_i \in G(X)$$

und

$$\{K_i : i \leq n\} \cup \{\emptyset\} \quad n\text{-stabil} \quad \text{ sowie}$$

(+)

$$K_i \subset K_j \Rightarrow U_i \subset U_j \quad \text{stets.}$$

Es gibt offene Mengen $V_i, W_i, N_i \in G(X)$ mit

$$U_i \supset N_i^a \supset N_i \supset W_i^a \supset W_i \supset V_i^a \supset V_i \quad \text{stets,}$$

$$(++) \quad \mu \left(\bigcap_{i=1}^n (K_i, V_i) \right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ und}$$

$$K_i \subset K_j \Rightarrow N_i \subset N_j, \quad W_i \subset W_j, \quad V_i \subset V_j \quad .$$

(Da X vollständig regulär ist, steigt das System der Mengen $\bigcap_{i=1}^n (K_i, N_i)$ mit $N_i^a \subset U_i$ gegen $\bigcap_{i=1}^n (K_i, U_i)$ auf.)

$$\text{Setzt man nun } \mu_1 = \chi \left(\bigcap_{i=1}^n (K_i, V_i) \right) \mu \quad \text{ und } \quad \mu_2 = \mu - \mu_1 \quad ,$$

sowie

$$U_1 := \{v : v(\bigcap_{i=1}^n (K_i, V_i)) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \wedge v(X^T) < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \}$$

bzw.

$$U_2 := \{v : v(X^T) < \frac{\varepsilon}{2} \} \quad ,$$

so gilt $U_1 + U_2 \subset U$ und wegen Lemma (7.4) ist nur noch zu zeigen, daß $\Lambda[U_1]$ eine Umgebung von $\Lambda(\mu_1)$ bildet. Ohne Einschränkung kann also $\mu = \mu_1$, d.h.

$$\mu(\bigcap_{i=1}^n (K_i, V_i)) = 1$$

angenommen werden.

- (4) Anzugeben ist eine Umgebung V von $\Lambda(\mu)$, für die zusätzlich $V \subset \Lambda[U]$ gilt. Für ein $\phi \in V$ muß also gelten, daß sein Marginalmaß $\phi(t)$ für $t \in K_1$ im "wesentlichen" auf U_1 konzentriert ist.

Diese Idee führt zur folgenden Definition:

$$V := \{\phi \in \mathcal{C} : \text{Es gibt ein } \psi \in \mathcal{C} \text{ mit } \phi \geq \lambda \psi, \psi(\cdot)(X) = 1 ,$$

$$\text{Tr}(\psi(t)) \subset N_1 \text{ für } t \in K_1, \text{ sowie } \phi(\cdot)(X) < 1 + \varepsilon\}$$

für beliebiges $\lambda \in]1-\varepsilon, 1[$.

- (5) V ist eine Umgebung von $\Lambda(\mu)$:

Für $\phi \in \mathcal{C}$ mit

$$\phi(\cdot)(Y) < 1 + \epsilon \quad \text{und}$$

$$\phi(t)(V_i) > \lambda \quad \text{für } t \in K_1, \quad i \leq n$$

wird nun $\phi \in V$ gezeigt. Sei

$$G_1 := \{t \in T : \phi(t)(V_1) > \lambda\} \supset K_1.$$

Lemma (7.5) liefert die dort beschriebenen Funktionen

$$h_1 \dots h_n \in \mathcal{C}(T). \text{ Setze noch } h_0 := 1 - \sum_{i=1}^n h_i.$$

Die Hilfsfunktionen $f_1 \dots f_n \in \mathcal{C}(X)$ mit $0 \leq f_i \leq 1$,

$$f_i|_{V_1^a} = 1 \quad \text{und} \quad f_i|_{\bar{W}_1} = 0$$

ermöglichen nun die Konstruktion von $\psi \in \mathcal{C}$ mit den gewünschten Eigenschaften:

$$\psi(t) := \sum_{i=1}^n h_i(t) f_i \phi(t) \frac{1}{\phi(t)(f_i)} + h_0(t) \phi(t) \frac{1}{\phi(t)(X)}.$$

Es folgt sofort:

$$- \lambda \psi(t) \leq \lambda \sum_{i=1}^n h_i(t) \phi(t) \frac{1}{\lambda} + \lambda h_0(t) \phi(t) \frac{1}{\lambda} = \phi(t) \quad \text{für } t \in T,$$

$$- \psi(t)(X) = 1 \quad \text{für } t \in T,$$

$$- \text{für } t \in K_1 \text{ und } K_\ell = \bigcap \{K_j : t \in K_j\} \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} T_x(\psi(t)) &\subset \bigcup \{W_j^a : K_j \subset K_\ell\} \\ &\subset \bigcup \{N_j : K_j \subset K_\ell\} \\ &\subset N_\ell \subset N_1. \end{aligned}$$

Also ist $\phi \in V$.

(6) V ist eine Teilmenge von $\Lambda[U]$:

Zu einem $\phi \in V$ mit entsprechendem ψ gibt es nach Vor-

aussetzung Maße $\nu, \rho \in M_T(X^T)$ mit $\Lambda(\nu) = \Psi$ und $\Lambda(\rho) = \Phi - \lambda\Psi$. Für $\mu = \lambda\nu + \rho$ gilt demnach $\Lambda(\mu) = \Phi$. Das Maß μ ist aus U , da gilt:

$$- \mu(X^T) = \Phi(\cdot)(X) < 1 + \varepsilon$$

$$- \mu\left(\bigcap_{i=1}^n (K_i, U_i)\right) \geq \lambda\nu\left(\bigcap_{i=1}^n (K_i, U_i)\right) \stackrel{(+)}{=} \lambda > 1 - \varepsilon.$$

Nur noch (+) ist zu begründen:

Wäre $\nu\left(\bigcap_{i=1}^n (K_i, U_i)\right) < 1$, so gäbe es ein i_0 (O.E. $i_0 = 1$)

mit $\nu((K_1, U_1)) < 1$ und somit $\overline{\nu((K_1, N_1^a))} > 0$.

Da das System offener Mengen

$$G_{t_1 \dots t_m} := \bigcup_{j=1}^m (\{t_j\}, \overline{N_1^a}), \quad t_1 \dots t_m \in K_1$$

gegen (K_1, N_1^a) aufsteigt, gibt es $t_1 \dots t_m \in K_1$ mit

$\nu(G_{t_1 \dots t_m}) > 0$, also auch ein $j \leq m$ (O.E. $j = 1$) mit

$\nu(\{t_1\}, \overline{N_1^a}) > 0$. Der Träger von $\Psi(t_1)$ ist also

keine Teilmenge von N_1 , im Widerspruch zur Wahl von Ψ .

Q.e.d.

Eine erste Antwort auf die Frage nach der Surjektivität von Λ gibt ein Satz von BLUMENTHAL/CORSON. Für einen kompakten, 0-dimensionalen Raum T und einen vollständig metrisierbaren Raum X wird dort diese Eigenschaft gezeigt. Die wichtigen Fälle $T = \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ sind darin aber nicht ent-

halten. Deswegen noch folgender Satz:

(7.7) Satz

Sei X ein kompaktmetrisierbarer Raum und T vollständig regulär. Enthält dann X mindestens zwei Punkte, so sind äquivalent

- (a) T ist stark O-dimensional
- (b) zu jeder stetigen Abbildung $\phi : T \rightarrow M_T(X)$ mit konstantem Gesamtmaß, gibt es ein $\mu \in M_T(X^T)$ mit den Marginalmaßen $(\phi(t))_{t \in T}$.

Mit der Definition und dem Satz von WALKER heißt ein vollständig regulärer Raum genau dann stark O-dimensional, wenn ein Paar disjunkter Zeromengen durch clope Mengen getrennt werden kann, oder äquivalent dazu, wenn die Stone-Čech-Kompaktifizierung βT O-dimensional ist. In Lindelöfräumen fallen die Eigenschaften stark O-dimensional und O-dimensional zusammen (WALKER, 3.35).

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b):

Ohne Einschränkung habe die stetige Abbildung $\phi : T \rightarrow M_T(X)$ konstantes Gesamtmaß 1. Da der Raum $P_T(X) = P_{st}(X)$ kompakt ist (vgl. Alaoglu-Theorem), gibt es eine stetige Abbildung

$$\phi' : \beta T \rightarrow P_T(X) \quad \text{mit} \quad \phi'|_T = \phi.$$

Mit dem Resultat von BLUMENTHAL/CORSON existiert also ein Maß $\mu' \in M_T(X^{\beta T})$ mit

$$\pi_t(\mu') = \phi'(t) \quad \text{für alle } t \in \beta T.$$

Das Bildmaß μ von μ' bzgl. der stetigen Abbildung

$$i : X^{\beta T} \ni f \rightarrow f|_T \in X^T$$

ist dann geeignet.

(b) $\Rightarrow$ (a):

Die disjunkten Mengen

$$Z_1 := \{t \in T : f_1(t) = 0\} \quad , \quad 0 \leq f_1 \in \mathcal{C}(T) \quad , \quad 1 = 1, 2,$$

sind durch eine clope Menge zu trennen. Setze dazu

$$g := \frac{f_2}{f_1 + f_2} \in \mathcal{C}(T)$$

und

$$\phi(t) := g(t)\varepsilon_1 + (1-g(t))\varepsilon_2$$

(ohne Einschränkung seien $1, 2 \in X$).

Nach Voraussetzung gibt es also ein $\mu \in M_T(X^T)$ mit

$\tilde{\pi}_t \mu = \phi(t)$ stets. Es gilt

$$\mu(\{(t_0), \overline{\{1, 2\}}\}) = \mu(\{(t_1), \overline{\{1\}}\}) = \mu(\{(t_2), \overline{\{2\}}\}) = 0 \quad \text{für}$$

$t_0 \in T$ und $t_1 \in Z_1$. Wegen der τ -Stetigkeit des Maßes μ folgt

$$\mu(\{f \in X^T : f(t_0) \notin \{1,2\} \text{ für ein } t_0 \in T \text{ oder} \\ f(t_1) \neq 1 \text{ für ein } t_1 \in Z_1 \text{ oder} \\ f(t_2) \neq 2 \text{ für ein } t_2 \in Z_2 \}) = 0$$

Es gibt also ein $f \in X^T$ mit $f(T) = \{1,2\}$, $f|_{Z_1} = 1$
und $f|_{Z_2} = 2$. T zerfällt somit in die clopen Mengen

$$f^{-1}(\{1\}) \quad \text{und} \quad f^{-1}(\{2\}) . \quad \text{Q.e.d.}$$

8. Kapitel: DIE MITTELWERTABBILDUNG STETIGER FUNKTIONEN
VON MÄßEN

Dieses Kapitel verallgemeinert noch einmal die Resultate des ersten Abschnittes: Für kompakte T , polnische Räume X und $\lambda \in P_\sigma(T)$ definiert SUN MAN CHANG eine Abbildung φ_λ , die jeder stetigen Funktion ϕ von T nach $P_\sigma(X)$ ihren Mittelwert $\varphi_\lambda(\phi) \in P_\sigma(X)$ zuordnet, d.h. für alle stetigen und beschränkten $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi_\lambda(\phi)(f) = \int \phi(t)(f) \lambda(dt) .$$

Chang zeigt die Offenheit dieser Abbildung bzgl. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf der Definitionsmenge. Hier wird die entsprechende Aussage für vollständig reguläre T , beliebige X , $\lambda \in M_0(T) \setminus \{0\}$ und stetige Abbildungen ϕ in $M_0(X)$ gezeigt.

Chang zeigt sein Ergebnis zuerst für polnische Räume, die eine Basis aus offenen und abgeschlossenen Mengen besitzen, um es dann mittels der folgenden Aussage von BLUMENTHAL/CORSON auf beliebige polnische Räume auszuweiten:

Zu jedem polnischen Raum X gibt es einen polnischen Raum mit einer Basis aus offenen und abgeschlossenen Mengen Y , eine stetige Abbildung $f: Y \rightarrow X$ und eine stetige Abbildung $g: P_\sigma(X) \rightarrow P_\sigma(Y)$ für die gilt:

$$\tilde{f} \circ g = \text{id}_{P_\sigma(X)} .$$

Entsprechende Resultate in der viel allgemeineren Situation,

die hier untersucht werden soll, liegen nicht vor. Mein Beweis beschreitet deswegen einen anderen Weg: Es wird gezeigt, daß es zu jeder im Definitionsbereich offenen Menge eine Teilmenge mit gleichem Bild unter φ_λ gibt, auf der φ_λ im wesentlichen nur eine Addition im Sinne von Kapitel 1 ist.

Weiterhin wird ein Beispiel gegeben dafür, daß die Forderung an T nicht auf "regulär" abgeschwächt werden kann. Vor der Definition der fraglichen Abbildung ist folgendes Lemma notwendig:

(8.1) Lemma

Sei X ein topologischer Raum und $B \in \mathcal{B}(X)$. Dann ist die Abbildung

$$M_\sigma(X) \ni \mu \rightarrow \mu(B) \in \mathbb{R} \quad \text{Borel-meßbar.}$$

Beweis:

Die Menge

$$\{B \in \mathcal{B}(X) : (8.1) \text{ gilt für } B\}$$

ist ein Dynkin-System und enthält den (σ -stabilen) Erzeuger $\mathcal{G}(X)$ von $\mathcal{B}(X)$. Q.e.d.

Die folgende Definition ist damit möglich:

(8.2) Definition

Seien T und X topologische Räume sowie $\lambda \in M_\sigma(T)$.

Setze

$$C := \{ \phi \in M_0(X)^T : \phi(\cdot)(X) \text{ ist } \lambda\text{-integrierbar} \} .$$

Dann wird die Abbildung

$$\varphi_\lambda : C \ni \phi \rightarrow \varphi_\lambda(\phi) \in M_0(X)$$

erklärt durch

$$\varphi_\lambda(\phi)(B) := \int \phi(t)(B) \lambda(dt) .$$

Die Frage nach der Stetigkeit von φ_λ soll hier nicht systematisch untersucht werden. Sie hängt eng mit den Konvergenzsätzen der klassischen Maßtheorie zusammen und ist deswegen mit diesen Mitteln auch leicht zu lösen. Zwei Beispiele dafür:

(1) Sei $X = T = \mathbb{R}$ und $\lambda := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \chi_{[n, n+1]} \tilde{\lambda}$ ($\tilde{\lambda}$ sei das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$).

Wähle $f_n \in C(\mathbb{R})$ mit

$$f_n|_{[n, n+1]} = 2^n \quad \text{und} \quad f_n|_{[\overline{n-1, n+2}]} = 0$$

und setze

$$\phi_n := f_n \varepsilon_0 .$$

Es folgt $\phi_n \rightarrow 0$ in C und

$$\varphi_\lambda(\phi_n)(X) \geq 2^{-n} \tilde{\lambda}(\chi_{[n, n+1]} f_n) = 1 .$$

φ_λ ist also nicht stetig.

(2) Seien X und T topologische Räume mit abzählbarer Basis und zusätzlich T kompakt. Sei $\lambda \in M_0(T)$. Dann ist φ_λ stetig, denn:

Mit $M_0(X)$ und T hat auch C eine abzählbare Basis (DUGUNDJI, p. 265, 5.2).

Sei also ϕ_n eine Folge in C , die gegen $\phi \in C$ konvergiert. Da T kompakt ist, ist $\phi(\cdot)(X)$ beschränkt (durch $B \in \mathbb{R}^+$). Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq N$ und für alle $t \in T$ gilt $\phi_n(t)(X) \leq B+1$. Mit dem Satz von Lebesgue folgt

$$\begin{aligned} \limsup \varphi_\lambda(\phi_n)(X) &= \limsup \lambda(\uparrow_n(\cdot)(X)) \\ &= \lambda(\phi(\cdot)(X)) = \varphi_\lambda(\phi)(X), \end{aligned}$$

sowie für $G \in \mathcal{G}(X)$ mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} \liminf \varphi_\lambda(\phi_n)(G) &= \liminf \lambda(\uparrow_n(\cdot)(G)) \\ &\geq \lambda(\liminf \phi_n(\cdot)(G)) \geq \lambda(\phi(\cdot)(G)) = \varphi_\lambda(\phi)(G). \end{aligned}$$

φ_λ ist auch für kompakte, polnische Räume nicht unbedingt abgeschlossen:

Sei $T = [0, 1]$, $X = \{0\}$ und $\lambda := \sum_{n \in \mathbb{N}} (1/(n+1))^2 \epsilon_{1/n}$.

Wähle $f_n \in C(T)$ mit $f_n(1/n) = n^2$ und

$f_n|_{[1/(n+1), 1/(n-1)]} = 0$ sowie $\uparrow_n := f_n \epsilon_0$ für $n \geq 2$.

Dann ist $F := \{\phi_n : n \geq 2\}$ offensichtlich abgeschlossen in C und es gilt:

$$\varphi_\lambda(F) = \{(n^2/(n+1)^2)\varepsilon_0 : n \geq 2\}.$$

Es bleibt die Offenheit von φ_λ zu untersuchen.

φ_λ ist klarerweise surjektiv, jedoch auf eine extreme Weise nicht injektiv, was in folgendem Lemma ausgenutzt wird, um ein $\phi \in C$ innerhalb einer Umgebung zu "glätten".

(8.3) Lemma

Sei T vollständig regulär, X ein topologischer Raum und $\lambda \in M_0(T)$. Zu $U \in \mathcal{G}(C)$ und $\phi \in U$ gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$, $v_1 \dots v_n \in M_0(X)$ und eine Teilung der 1 $h_1 \dots h_n \in C(T)$, für die gilt:

$$(i) \quad \psi := \sum_{i=1}^n h_i v_i \in U$$

$$(ii) \quad \varphi_\lambda(\psi) = \varphi_\lambda(\phi).$$

Beweis:

Sei also $\phi \in \bigcap_{j \leq m} (K_j, \Gamma_j) \subset U$, $K_j \in K(T)$, $\Gamma_j \in w(X)$.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werden die Γ_j als konvexe Mengen aus der im nullten Kapitel angegebenen Basis angenommen. Ebenfalls ohne Einschränkung seien die K_j paarweise verschieden und nicht leer, $\{K_j : j \leq m\} \cup \{\emptyset\}$ sei $\cap$ -stabil und es gelte

$$(+)\quad K_i \subset K_j \Rightarrow \Gamma_i \subset \Gamma_j \quad \text{stets}.$$

Für

$$G_j := \phi^{-1}(\Gamma_j) \supset K_j, \quad j \leq m$$

liefert (7.5) die dort beschriebenen $h_1 \dots h_m \in \mathcal{C}(T)$. Mit

$$\begin{aligned} n &:= m+1, \quad h_n := 1 - \sum_{i \leq m} h_i, \quad \Gamma_n := M_\sigma(X) \quad \text{und} \\ v_1 &:= \varphi_\lambda(h_1 \phi) \lambda(h_1)^{-1} \in \Gamma_1 \quad \text{falls } \lambda(h_1) > 0, \\ v_1 &\in \Gamma_1 \quad \text{beliebig} \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

folgt

(i):

Sei $t \in K_j$ und $K_\ell := \bigcap \{K_1 : t \in K_1\}$. Wegen der Konvexität von Γ_j und (7.5)(iii) ist für $i \leq m$ mit $K_1 \subset K_\ell$ zu zeigen: $v_1 \in \Gamma_j$. Das ist aber klar, da wegen $K_1 \subset K_\ell \subset K_j$ und (+) gilt: $v_1 \in \Gamma_1 \subset \Gamma_\ell \subset \Gamma_j$.

(ii):

Sei $\Psi := \sum_{i \leq n} h_i v_i$ und $B \in \mathcal{B}(X)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(\Psi)(B) &= \sum_{i \leq n} \varphi_\lambda(h_i v_i)(B) = \sum_{i \leq n} \lambda(h_i) v_i(B) \\ &= \sum_{i \leq n} \varphi_\lambda(h_i \phi)(B) = \varphi_\lambda(\phi)(B). \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, daß für $i \leq n$ mit $\lambda(h_i) = 0$ klarerweise $h_i \lambda$ -fast überall 0 ist, also auch $\varphi_\lambda(h_i \phi) = 0$ gilt. Q.e.d.

Nun ist klar, daß für alle $U \in \mathcal{G}(C)$ (T vollständig regulär) gilt:

$$\varphi_\lambda(U) = \varphi_\lambda(\{\psi \in U : \psi = \sum_{i=1}^n h_i v_i \text{ für } n \in \mathbb{N}, v_1 \dots v_n \in M_\sigma(X), \\ 0 \leq h_1 \dots h_n \in C(T) \text{ mit } \sum_{i=1}^n h_i = 1\}) .$$

Damit kann die Offenheit dieser Menge auf die Aussagen des ersten Kapitels zurückgeführt werden.

(8.4) Satz

Sei T vollständig regulär, X ein topologischer Raum und λ ein von 0 verschiedenes Borel-Maß auf T .

Dann ist φ_λ offen.

Beweis:

Sei

$$P_n := \{(h_1, \dots, h_n) : h_i \in C(T), h_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^n h_i = 1\}$$

die Menge der Partitionen der 1 mit n Summanden.

Setze

$$Y_n^p := M_\sigma(X)^n \times \{p\}$$

mit der Produkttopologie für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in P_n$.

Setze

$$Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in P_n} Y_n^p$$

mit der Summenraumtopologie.

Definiere $\varphi_1 : Y \ni (v_1, \dots, v_n, (h_1, \dots, h_n)) \rightarrow \sum_{i \leq n} h_i v_i \in C$

$\varphi_2 : Y \ni (v_1, \dots, v_n, (h_1, \dots, h_n)) \rightarrow \sum_{i \leq n} \lambda(h_i) v_i \in M_\sigma(X).$

Es gilt

(1) φ_1 ist stetig:

Für $n \in \mathbb{N}$, $p \in P_n$ ist die Stetigkeit von $\varphi_1|_{Y_n^p}$ zu zeigen.

Hierfür ist die Stetigkeit der Abbildung

$$M_\sigma(X) \ni v \rightarrow hv \in C$$

für $h \in C^b(T)$ hinreichend (beachte (1.2) und DUGUNDJI, p.278, Beweis (1.2)).

(2) φ_2 ist offen:

Zu zeigen ist für $n \in \mathbb{N}$ und $p = (h_1, \dots, h_n) \in P_n$ die Offenheit von $\varphi_1|_{Y_n^p}$. Für $\Gamma_1 \in w(X)$ gilt

$$\varphi_2(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n \times \{p\}) = \sum_{i \leq n} \lambda(h_i) \Gamma_i.$$

Diese Menge ist wegen (1.5) offen in $M_\sigma(X)$, da mindestens ein $i \leq n$ mit $\lambda(h_i) > 0$ existiert.

(3) Für $U \in \mathcal{C}(C)$ gilt $\varphi_\lambda(U) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(U))$:

- Zu $\phi \in U$ gibt es mit (8.3) ein $y \in Y$ mit $\varphi_1(y) \in U$ und $\varphi_2(y) = \varphi_\lambda(\phi)$.

- Für $y \in Y$ mit $\varphi_1(y) \in U$ gilt $\varphi_2(y) = (\varphi_\lambda \circ \varphi_1)(y) \in \varphi_\lambda(U)$.

(1), (2) und (3) liefern die Behauptung. Q.e.d.

Die Aussage von Chang wird von dem folgenden Korollar umfaßt.

(8.5) Korollar

Ist unter den Voraussetzungen von (8.4) zusätzlich λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so ist die Abbildung

$$\varphi_\lambda : \{ \phi \in C : \phi(T) \subset P_\sigma(X) \} \rightarrow P_\sigma(X)$$

offen.

Beweis:

Der Beweis erfolgt in völliger Analogie zu (8.3) und (8.4): Beachte in (8.3), daß die konstruierten v_1 in $P_\sigma(X)$ enthalten sind, das konstruierte Ψ also $\Psi(T) \subset P_\sigma(X)$ erfüllt. Wähle sodann in (8.4) $Y_n^p := (P_\sigma(X))^n \times \{p\}$. Q.e.d.

Um zu zeigen, daß die Bedingung an T in (8.5) nicht auf "regulär" abgeschwächt werden kann, noch folgendes Lemma:

(8.6) Lemma

Sei $T = X$ ein separabler Hausdorffraum und $T \ni y_1 \neq y_2 \in T$, so daß für alle $f \in C(T)$ gilt $f(y_1) = f(y_2)$. Dann gibt es ein von 0 verschiedenes Borelmaß λ auf T , so daß φ_λ nicht offen ist.

Beweis:

Sei $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in T und

$$\lambda := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \epsilon_{t_n} \in P_{st}(T) .$$

(1) Für $\Psi \in C$ mit $\varphi_\lambda(\Psi) = \sum_{i \leq m} a_i \epsilon_{x_i}$ für $a_i > 0$ und

$x_i \in X$ folgt $\Psi(y_1) = \Psi(y_2)$, denn

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Psi(t_n) (\overline{\{x_1, \dots, x_m\}}) \leq 2^n \varphi_\lambda(\Psi) (\overline{\{x_1, \dots, x_m\}}) = 0 .$$

Die offene Menge

$$\{t \in T : \Psi(t) (\overline{\{x_1, \dots, x_m\}}) > 0\}$$

enthält also kein t_n und ist damit leer. Folglich ist die Abbildung

$$T \ni t \rightarrow \Psi(t) (\{x_1\}) = \Psi(t)(X) - \sum_{j \neq 1} \Psi(t) (\{x_j\})$$

sowohl in $\mathcal{C}_1(T)$, als auch in $\mathcal{C}_s(T)$, also stetig und es folgt $\Psi(y_1) = \Psi(y_2)$.

(2) $\Phi : T \ni t \rightarrow \epsilon_t \in M_\sigma(X)$ ist in C . Wähle $G_1 \in \mathcal{G}(X)$ mit $y_1 \in G_1$ sowie $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Es gilt

$$\Phi \in U := \bigcap_{i \leq 2} (\{y_i\}, \{\rho : \rho(X) < 3/2 \text{ und } \rho(G_i) > 3/4\}) \in \mathcal{G}(C) .$$

Da

$$\{\rho \in M_\sigma(X) : \rho(X) < 3/2 \text{ und } \rho(G_i) > 3/4 \text{ für } i=1,2\} = \emptyset$$

gilt, enthält U kein Ψ mit $\Psi(y_1) = \Psi(y_2)$. Somit befinden sich nach (1) in $\varphi_\lambda(U)$ keine Maße vom Typ $\sum_{i \leq m} a_i \epsilon_{x_i}$, $m \in \mathbb{N}$, $a_i > 0$ und $x_i \in X$. Die Menge aller dieser Maße ist aber dicht in $M_\sigma(X)$ (vgl. TOPSØE, p.48, 11.1), also ist $\varphi_\lambda(U)$ nicht offen. Q.e.d.

(8.7) Beispiel

- (a) Es gibt Räume X und T , die regulär, separabel, abzählbar kompakt und first-countable sind und ein straffes Maß $\lambda \in M_\sigma(T) \setminus \{0\}$, so daß φ_λ nicht offen ist.
- (b) Die Aussage (a) bleibt auch dann richtig, wenn die Topologie auf C durch die Topologie der punktweisen Konvergenz (die Mengen $(\{t\}, \Gamma)$, $t \in T$, $\Gamma \in \mathcal{W}(X)$ bilden eine Subbasis) ersetzt und damit abgeschwächt wird.

Beweis:

Die Behauptung folgt mit (8.6) und einem Resultat von OSTASZEWSKI. Dort wird ein separabler, regulärer und abzählbar kompakter Raum Y mit abzählbaren Umgebungsbasen konstruiert, der eine abgeschlossene, überabzählbare Teilmenge F sowie einen Punkt y enthält, so daß $y \notin F$ und die Menge $\{y_0 \in F : f(y) \neq f(y_0)\}$ für alle $f \in C(Y)$ abzählbar ist.

Setze $X_0 := X \times \{1\} \cup X \times \{2\}$ mit der Summenraumtopologie und identifiziere jetzt die einander entsprechenden Punkte

in $F \times \{1\}$ bzw. $F \times \{2\}$ (d.h. für $x_1, x_2 \in X_0$ gilt $x_1 \sim x_2$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$ oder wenn gilt $x_1 = (z, 1)$ für ein $z \in F$). Der so entstandene Quotientenraum $X := X_0 / \sim$ ist wieder regulär, separabel, abzählbar kompakt und first-countable. Sei $p : X_0 \rightarrow X$ die kanonische Projektion. Dann gilt für $f \in C(X)$ und alle bis auf abzählbar viele $x \in p(F \times \{1\})$ offensichtlich $f(p((y, 1))) = f(x) = f(p((y, 2)))$. Q.e.d.

Man beachte, daß die Konstruktion von Ostaszewski zwei mengentheoretische Axiome, darunter die Kontinuumshypothese, verwendet.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{R}$	1	ε_x	2	Ψ_4	28
$\mathbb{R}^+$	1	$\mu(f)$	2	$H_C(X)$	29
$\mathbb{R}_O^+$	1	$f\mu$	2	ϕ_-	29
$\mathbb{N}$	1	$\tilde{\varphi}(\mu)$	2	$\phi_\wedge$	38
$\mathbb{Q}$	1	$M_I(X)$	2	ϕ_v	38
$P(X)$	1	$M_\tau(X)$	2	π_K	64/
$\overline{P}$	1	$M_{st}(X)$	2	N	64
$G(X)$	1	$P_I(X)$	3	Λ	64/
$F(X)$	1	$P_\tau(X)$	3	$\mu \hat{\otimes} v$	65
$K(X)$	1	$P_{st}(X)$	3	Λ_1	69
$B(X)$	1	$w(X)$	3	Λ_2	69
P^a	1	ϕ_+	5	N_1	69
P^O	1	$\downarrow$	5	N_2	69
$\mathfrak{C}(X)$	1	$i(\mu, v)$	6	π_{kl}	69
$\mathfrak{C}_1(X)$	1	$A(\alpha, \mu)$	9	π_t	77
$\mathfrak{C}_S(X)$	1	A	9	$\mathfrak{C}$	79
$\mathfrak{M}(X)$	1	n_α	9	$\sum$	80
$\mathfrak{C}^b(X)$	1	ϕ_λ	13	φ_λ	98
$\mathfrak{C}_1^b(X)$	1	Ψ_1	17	C	98
$\mathfrak{C}_S^b(X)$	1	Ψ_2	17		
$\mathfrak{M}^b(X)$	1	$AP_O(X)$	17		
X^Y	1	$D\rho$	19		
(K, A)	1	$E\rho$	19		
$M_O(X)$	2	$S\rho$	19		
$P_O(X)$	2	Ψ_3	26		

LITERATURVERZEICHNIS

- BANACH, S. und KURATOWSKI, K.: Sur une généralisation du problème de la mesure, *Fund. Math.* 14 (1929), 127-131.
- BAUER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, de Gruyter, Berlin 1974.
- BLUMENTHAL, R.M. und CORSON, H.H.: On continuous collections of measures, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 20 (1970), 193-199.
- CHANG, S.M.: On continuous image averaging of probability measures, *Pacific J. of Math.* 65 (1976), 13-17.
- DEGENS, P.O.: Clusteranalyse auf topologisch-maßtheoretischer Grundlage, Dissertation an der LMU, 13-17.
- DITOR, S. und EIFLER, L.Q.: Some open mapping theorems for measures, *TAMS*, 164 (1972), 287-293.
- DUGUNDJI, J.: *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston 1966.
- EIFLER, L.Q.(1): Open mapping theorems for probability measures on metric spaces, *Pacific J. of Math.* 66 (1976), 89-97.
- EIFLER, L.Q.(2): Convex averaging of Radon probability measures, *Glasnik Mat. Ser. III* 12 (32) (1977), 21-24.
- EIFLER, L.Q.(3): Some open mapping theorems for marginals, *TAMS*, 211 (1975), 311-319.
- ENGELKING, B.: *General topology*, PWN, Warschau 1977.
- GROEMIG, W.: On a weakly closed subset of the space of τ -smooth measures, *Proc. of the amer. math. soc.* 43 (1974), 397-401.
- HALMOS, P.R.: *Measure theory*, 6. Auflage, van Nostrand, New York 1959.
- OSTASZEWSKI, A.J.: A countable compact, first countable, hereditarily separable regular space which is not completely regular, *Bull. de l'Acad. Pol. des Sc.*, Vol. XXIII, 4, 1975, 431-435.

- RESSEL, P.: Some continuity and measurability results on spaces of measures, Math. Scand. 40 (1977), 69-78.
- ROCKAFELLER, R.T.: Convex Analysis, Princeton University Press 1970 .
- SCHWARTZ, L.: Radon measures, Oxford University Press 1973.
- TOPSØE, F.: Topology and Measure, Lecture Notes, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 133, 1970.
- WALKER, R.C.: The Stone-Čech-Compactification, Springer Verlag, BHNY 1974 .

LEBENS LAUF

Geburtsdatum : 29.2.1960
Geburtsort : Herrsching a.A.
Schulbildung:
1966 - 1970 Grundschohle in Herrsching
1970 - 1979 Max-Born-Gymnasium Germering
Juni 1979 Abitur
Zivildienst: Dezember 1979 - März 1981 bei
der Arbeiterwohlfohrt in Kempfen-
hausen
Studium: Seit Sommersemester 1981
Studium der Mathematik an der LMU
Mai 1983 Vordiplom
Juli 1985 Hauptdiplom
Berufliche Tätigkeit: Seit Oktober 1985 hauptberufliche
wissenschaftliche Hilfskraft an
der LMU.

